РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD
ČESKOSLOVENSKO-SOVĚTSKÝ
INSTITUT
Praha I, Jánská nl. 190

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 548—1049 **№ 2** **Февраль 1955 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

548. **Научная конференция Сектора математики и механики. Жаутыков О. А.**, Вестн. АН КазахССР, 1954, № 6, 104—107

Сообщается о докладах на конференции Сектора математики и механики Академии наук Казахской ССР, посвященной обсуждению результатов научных исследований и перспектив работы Сектора.

549. **Доклады на заседаниях Вроцлавской секции Польского математического общества** (Comptes rendus. Société polonaise de mathématique. Section de Wrocław), Colloq. math., 1954, **3**, № 1, 76—86 (франц., англ.)

Приведены краткие резюме докладов за 1951 г.

550. **Впечатления от VIII Международного конгресса геометров, Париж 1953 г. Херрн** (Eindrücke vom VIII. Internationalen Kongreß der Geometer, Paris 1953. Härry), Schweiz. Z. Vermessung, 1953, **51**, № 12, 322—326 (нем.)

551. **Конференция по обучению прикладной математике. Хон** (The conference on training in applied mathematics. Hohn F. E.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 4, 242—245 (англ.)

Отчет о решениях, принятых на конференции, состоявшейся в октябре 1953 г. в Колумбийском университете. Перечисляются причины проявляемого интереса к прикладной математике, требования, которые должны предъявляться к специалисту по прикладной математике (среди них: разносторонность и подвижность интересов, умение принимать участие в коллективных научных исследованиях, способность удовлетворяться приближенными, и даже неполными результатами, и быстро переключаться с одной задачи на другую, быть может, менее интересную), а также основные положения для составления программ (в частности, считается необходимым включение теории вероятностей и статистики, что особо оговаривается, а также изучение иностранных языков). Программы рассчитаны на подготовку на уровне, соответствующем степени кандидата наук. *В. И. Левин*

552. **Конференция по обучению прикладной математике. Вейль** (The NRC-AMS conference on training in applied mathematics. Weyl F. Joachim), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, **60**, № 1, 38—44 (англ.)

Отчет о конференции, созванной Национальным советом по научным исследованиям и Американским математическим обществом в октябре 1953 г. См. реф. 551. *В. И. Левин*

553. **Работы советского математика И. Г. Петровского. Теодореску** (Opera matematicianului sovietic I. G. Petrovski. Teodorescu N.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1954, **7**, № 2, 9—31 (рум.)

Дается подробный обзор работ и учебников И. Г. Петровского.

554. **Жюлья представил X том сочинений Пуанкаре...** (M. Gaston Julia dépose sur le Bureau de l'Académie le tome X des Oeuvres de Henri Poincaré...), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 20, 1941—1943 (франц.)

Сообщается о заседании Французской академии наук, посвященном столетию со дня рождения Анри Пуанкаре, на котором Жюлья представил последний том сочинений Пуанкаре.

555. **Преподавание математики и школьная реформа. Бенке** (Der mathematische Unterricht und die Schulreformen. Behnke Heinrich), Math.-phys. Semesterber., 1953, **3**, № 1/2, 1—15 (нем.)

После краткого очерка истории работы Международной комиссии по преподаванию математики с момента ее организации в 1908 г. по 1937 г. сообщается, что эта комиссия была вновь организована весной 1952 г. На немецкой секции этой комиссии обсуждался предварительный план ее работы, который, в частности, предусматривает критический разбор всех действующих в настоящее время немецких школьных учебников по математике, привлечение к обсуждению и составлению школьных учебников преподавателей высших школ и составление обзора всех современных педагогических и психологических исследований, относящихся к методике преподавания математики. *В. И. Левин*

556. **Изменение количества уроков по математике в немецких школах второй ступени.** Виганд (Die stundenzahlmäßige Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den deutschen höheren Schulen. Wigand Klaus), Math.-phys. Semesterber., 1953, **3**, № 3/4, 250—255 (нем.)

Приводятся данные по прусским школам о количестве уроков по математике за некоторые годы в период с 1788 по 1950 г. *В. И. Левин*

557. **Математика как творческое искусство.** Бауэр (Mathematics as a creative art. Bower Julia Wells), Math. Teacher, 1954, **47**, № 1, 2—7 (англ.)

Развивается точка зрения на творческое начало в математике, близкая к взглядам Ж. Адамара (Hadamard J., The psychology of invention in the mathematical field, Princeton, N. Y., 1945). В качестве иллюстраций привлекаются некоторые положения Евклида.

Примечание референта. Нельзя согласиться с утверждением автора, что «Наличие в составе математических знаний противоречащих друг другу систем, таких как евклидова и неевклидовы геометрии, указывает, повидимому, на то, что математика не ограничивается лишь открытием существующих (pre-ordained) истин, а является скорее искусством свободно творить любые воображаемые миры по своему усмотрению» (стр. 3). Совершенно очевидно, что существование евклидовой и неевклидовой геометрий как математических дисциплин, представляющих собой разные ступени нашего познания материального мира, никак не может считаться аргументом в пользу высказываемых автором идеалистических воззрений на сущность математики. *В. И. Левин*

558 К. **Научно-техническая конференция по итогам научно-исследовательских работ за 1953 год.** Тезисы докладов, 132 стр. (Моск. энерг. ин-т), М., 1954, 2 р. 60 к.

Приводятся тезисы следующих математических докладов: Н. А. Леднев, Об одном классе операторных уравнений с частными производными; М. И. Вишик, Некоторые интегральные оценки и их приложения в теории дифференциальных уравнений с частными производными; П. Е. Дюбюк, О числе подгрупп конечной абелевой p-группы; Г. В. Корицкий, О кривизне линий уровня при конформных отображениях; Ю. И. Гросберг, Некоторые вопросы теории возмущений; Б. В. Шабат, О модели Лаврентьева уравнений газовой динамики; М. С. Горнштейн, Численные методы решения уравнений; Е. И. Апарисио, Многочлены с целыми коэффициентами, наименее отклоняющиеся от нуля; А. Е. Сысоев, К вопросу о характеристике распределения вероятностей; С. А. Стебаков, Синтез n-мерных фазовых пространств; Г. И. Кручкович, Инвариантные признаки трехмерных римановых пространств, допускающих максимальную группу движений.

559 К. **Сочинения. Том VI (Геометрия и топология).** Пуанкаре (Oeuvres de Henri Poincaré. Tome VI. Géométrie et topologie, 540 p., Gauthiers-Villars, Paris, 1953, 7.500 fr., Ann. télécommuns, 1953, 8, № 12, A898 (библ.)

560 К. **Повторительный курс математики.** Камм (A refresher course in mathematics. Camm F. J., 240 pp., Emerson, New York, 1953, 2.95 doll.), Science, 1954, **119**, № 3079, 50 (библ.)

561 К. **Определения и теоремы математики.** Вычихло (Definice a vety z matematiky. Vyčichlo František, 127 s., SPN, Praha, 1953, 12.89 Kčs), Česká kniha, 1953, № 45, 879 (библ.)

562 К. **Математическая смесь.** Литлвуд (A mathematician's miscellany. Littlewood J. E., VII+136 pp., Methuen and Co., Ltd, London, 1953, 15 s.), Sci. Progr., 1953, **42**, № 165, 177 (библ.)

См. также: 566, 1019 К

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

563. **Как развивалась математика в России в древние времена.** Веттер (Jak se vyvíjela matematika v Rusku v nejstarších dobách. Vetter Quido), Mat.-přírodověd. rozhl., 1954, **33**, № 2, 52—55 (чеш.)

Краткий обзор развития русской математики от древнейших времен до Петра I.

Автор вводит в историю математики хорошо известное филологам, но мало известное математикам деление индоевропейских языков на два отдела: группа «кентум» и группа «сатем» в зависимости от обозначения для числа 100. К группе кентум принадлежат греческий, латинский и большинство западно-европейских языков (100 — centum (латинский); hundert (немецкий)); к группе сатем — славянские, иранские и индийские языки (100 — сто (русский), сад (таджикский), çata (санскритский)). Отмечается, что в России развивались собственные обозначения для высших разрядов чисел (тьма, легион, леодр, ворон, колода).

Автор указывает русские математические рукописи XVII в. и сравнивает их с чешскими рукописями XVI в. (Ondřej Klatovský, Jařík Mikuláš Brěnský, Jiřík Görl из Герлштейна).

И. Н. Веселовский

564. **Теория пропорций в эпоху итальянского Возрождения.** Натуччи (La teoria delle proporzioni nel rinascimento italiano. Natucci Alpinolo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 646—662 (итал.)

Изложенная в 5-й книге «Начал» Евклида теория пропорций, применимая как к соизмеримым, так и к несоизмеримым величинам, за немногими исключениями (Ис. Барроу, 1630—1677) оставалась непонятой и неоцененной вплоть до самого конца

XIX в. (в Италии ее впервые оценили Бетти и Брио-ски, а также Пеано); поэтому делались попытки ее упрощения.

В эпоху итальянского Возрождения первое сочинение о пропорциях (до сих пор еще не опубликованное) принадлежит Гвидо Убальдо даль Монте (1545—1607) и относится к теории сложных отношений, не затронутой у Евклида (соответствующее определение, помещенное в начале 6-й книги «Начал», является подложным, поскольку Евклид не использует его в дальнейшем, и оно не содержится в переводе Кампана). Вторым математиком, занимавшимся этой теорией, был Галилей (1564—1642), посвятивший ей начало «5-го дня» «Discorsi e dimostrazioni matematiche», опубликованного только в 1674 г. Вивиани (Ediz. Nationale, Firenze, 1933, т. VIII, 347—362). После Галилея эти вопросы были освещены Торричелли (1608—1647) в книге 4 »De proportionibus liber» (Opere di Ev. Torricelli; v. 1, Faenza, 1919) и Винченцо Вивиани (1622—1703) в парафразе 5-й книги Евклида (1674). Галилей считает, что определение пропорциональности должно быть возможно простым, чтобы оно было «наиболее понятным даже для простого народа, не освоившегося с математическими науками». Евклидовские определения, по его мнению, представляют теоремы, которые должны быть доказаны. В основу своей теории (по логической строгости значительно уступающей евклидовой) Галилей берет определение: «четыре величины будут пропорциональными друг другу, если избыток первой над второй (каким бы он ни был) будет подобен избытку третьей над четвертой». В дальнейшем изложении Галилей дает для величин теорию пропорциональности, одинаковую с той, которую Евклид дает для целых чисел, и по существу исключающую несоизмеримость. Первым указал на необходимость учета несоизмеримости отношений при установлении теории пропорций Джакомо Альфонсо Борелли (1608—1674) в своей книге «Euclides restiius» (1658). *И. Н. Веселовский*

565. Неделимые. Форти (Gli indivisibili. Forti Umberto), Illustr. scient., 1953, 5, № 45, 12—17 (итал.)

Рассматриваются работы по геометрии, содержащие зародыши идей анализа бесконечно малых. Подробнее других излагаются работы итальянских математиков — предшественников математического анализа: Луки Валерио, Борелли, Торричелли, Кавальери и др. Статья не содержит нового материала по истории математики. *В. А. Голубев*

566. К истории математики в Берлине и общие замечания относительно ее будущего развития. Шрёдер (Zur Geschichte der Mathematik in Berlin und allgemeine Bemerkungen zu ihrer künftigen Entwicklung. Schröder Kurt), Ber. Mathematiker-Tagung Berlin, 1953, 1—4 (нем.)

Запись торжественной речи, произнесенной на открытии в новом помещении сессии Математического института при Берлинском университете имени Гумбольдта. В первой части речи упоминаются известные факты из истории математики в Берлине. Во второй части высказываются общие соображения о развитии математики в направлении преодоления некоторой разобщенности между так называемой чистой и прикладной математикой, имевшей место в прошлом. *Л. П. Гокиели*

567. Первый геометрический труд Филиппа де Ля Гира. Татон (La première oeuvre géométrique de Philippe de La Hire. Taton René), Rev. histoire sci., 1953, 6, № 2, 93—111 (франц.)

Статья содержит текст первого, очень редкого, мемуара де Ля Гира (1640—1718), опубликованного в 1672 г. знаменитым в те времена техником-гравером Боссом, учеником Дезарга («Соображения о точках прикосновения трех прямых линий, которые касаются сечения конуса, о некоторых диаметрах и о центре этого сечения». Опубликованы А. Боссом, Париж, сентябрь 1672 г.). Комментарии посвящены выяснению происхождения мемуара и его краткому описанию. Мемуар проливает свет на источники общей теории конических сечений Ля Гира, основанной на том, что плоское сечение конуса, основанием которого служит какое-нибудь коническое сечение, есть снова коническое сечение (сечение кругового конуса). Мемуар возник из практической задачи в области архитектуры сводов, для решения которой Боссу потребовалась консультация геометра. Речь шла о построении отлогих арок, сводившемся к построению конического сечения, касающегося трех данных прямых и двух из них в двух данных точках. Непосредственно речь шла даже не о прямых, а об отрезках двух «крайних» и «среднем», причем арка должна была касаться «крайних» в их концах.

Основной интерес для истории математики представляет решение Ля Гиром задачи об отыскании точки касания «среднего» отрезка, в связи с которым он доказывает теорему (IV): если «крайние» касательные пересекают «среднюю» в точках B и C, а O есть точка пересесения «средней» касательной с хордой, соединяющей точки касания «крайних», то точки O и A, где A — искомая точка касания «средней», делят отрезок BC гармонически. Теорема доказывалась Ля Гиром методом проектирования с помощью сведения к более простому случаю (когда «крайние» касательные параллельны), для которого решение получалось непосредственно из некоторых теорем Аполлония (доказательство состоит в построении кругового конуса — его основания и вершины — и такой секущей его плоскости, для которой задача приобретает более простую форму и позволяет в то же время перенести непосредственно, параллельным проектированием полученный результат на нужную «среднюю» касательную). Лишь в заключение делается обобщение, снижающее различение «средней» и «крайних» касательных.

Практические корни работы Ля Гира таким образом сохранились в самой формулировке его теорем. Утверждение же Фонтенелля в некрологе о Ля Гире, до сих пор остающемся основным источником сведений о нем, будто в этой первой работе Ля Гир по просьбе Босса и Дезарга сделал нужную для них выписку (семи теорем) из уже подготовленной им в то время большой работы о конических сечениях («Новый метод в геометрии для сечений конических и цилиндрических поверхностей, имеющих основаниями окружности или параболы, эллипсы и гиперболы», Париж, 1673), содержит неточности. Дезарга, для которого задача вообще не представила бы трудности, в это время уже 11 лет не было в живых, а Босс

в предисловии к работе Ля Гира указывает, наоборот, что, исходя из практических задач, поставленных им, Боссом, Ля Гир собственно и предпринял исследование всех вообще конических сечений: «...проработав над этим вопросом об отлогих арках, он перешел незаметно к углублению случаев различных конических сечений, которые служат для их образования сообразно всем обстоятельствам, в каких они могут находиться» (из предисловия Босса).

Сам Ля Гир указывает также впоследствии, что на свои теоретические размышления, связанные с отлогими арками, он был наведен наблюдениями над практическими приемами каменщика Руже, «большого знатока в резке камней» (Les Planiconiques, 1673). В то же время методы Ля Гира заставляют предполагать если не прямое, которое он отрицал, то во всяком случае косвенное — через отца и Босса — влияние на него идей проективной геометрии Дезарга.

Статья заканчивается краткой справкой о вынужденном Абрамом Боссом, через два месяца после опубликования мемуара Ля Гира, его собственном дополнительном мемуаре, обращенном, повидимому, непосредственно к резчикам камней и содержавшем «универсальное правило для начертания всевозможных отлогих арок в любых условиях заказа (sujections), которые могут быть предложены, без использования осей, фокусов или веревки». *С. А. Яновская*

568. **Не замеченная до сих пор ошибка в одном доказательстве Архимеда. Хермелинк** (Ein bisher übersehener Fehler in einem Beweis des Archimedes. Hermelink Heinrich), Arch. internat. histoire sci., 1953, **6**, № 25, 430—433 (нем.)

Автор отмечает, что в сочинении Архимеда «О коноидах и сфероидах» при определении объема параболоида вращения (предложение XXI) содержится ошибочное утверждение, которое в современных терминах можно записать так:

$$(n-1)r > 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\nu r}{n},$$

тогда как на самом деле здесь левая часть в точности равна правой. Эта ошибка, однако, не влияет на правильность доказательства в целом, так как Архимед пользуется только тем, что

$$nr > 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\nu r}{n},$$

а это неравенство является справедливым.
И. Г. Башмакова

569. **Иоганн Кеплер: «Дополнения к Вителло»** (Johann Kepler: Paralipomena ad Vitellionem. B. A. S.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 323, 44—46 (англ.)

Краткое изложение содержания труда Кеплера «Paralipomena ad Vitellionem», посвященного вопросам оптики и астрономии, опубликованного в 1604 г. *Р. А. Симонов*

570. **Принцип перманентности Ханкеля в свете исторической эволюции понятия числа от натурального до мнимого. Стипанич** (Le principe de la permanence de Hankel à la lumière de l'évolution historique de la notion du nombre depuis le nombre naturel jusqu'au nombre imaginaire (Une contribution à la dialectique concrète du nombre.). Stipanić Ernest), Bull. Soc. Math. Phys. Serbie, 1953, 5, № 1—2, 57—66 (франц.)

571. **Ян Брожек из Кужелува (1585—1652). Савицкий** (Prof. dr Jan Brożek z Kurzelova (1585—1652). Sawicki Kazimierz), Przegl. geod., 1954, **10**, № 3, 78—82 (польск.)

В 1952 г. исполнилось 300 лет со дня смерти выдающегося польского ученого XVII в., профессора и ректора Краковской академии Яна Брожека (ранее известного под латинизированным именем Бросциус Куреловиенсис или Курцеловиенсис).

В статье дается краткий очерк жизни и разносторонней научной деятельности (математика, астрономия, геодезия, медицина, теология) Яна Брожека. *Л. А. Стебакова*

572. **Два посещения Декартом Паскаля. Раймонди** (Due visite di Descartes a Pascal. Raimondi Giuseppe), Civiltá macchine, 1953, **1**, № 5, 12—16 (итал.)

Описываются (в полубеллетристической форме) два посещения Паскаля Декартом 23 и 24 сентября 1647 г. Двадцатичетырехлетний Паскаль в это время уже был известен как изобретатель счетной машины, модель которой хранилась у Роберваля, бывшего другом Паскаля, а также как автор работ в области гидростатики. Впервые Декарт посетил больного Паскаля в сопровождении Роберваля, и разговоры касались опытов Паскаля относительно пустоты; вторично Декарт посетил Паскаля один, и разговор велся без свидетелей (повидимому, позднее Паскаль также один раз посетил Декарта). Автор дает сравнительную характеристику обоих великих людей и отмечает, что в «Pensées» Паскаль выступает определенным противником Декарта. *И. Н. Веселовский*

573. **Общественная деятельность Н. И. Лобачевского во время холерной эпидемии 1830 г. Дранкин Д. И.**, Сов. здравоохранение, 1954, № 1, 45—47

Автор приводит новые интересные архивные материалы, характеризующие деятельность Н. И. Лобачевского во время эпидемии холеры 1830 г. За участие в борьбе с холерой Н. И. Лобачевский был представлен к ордену. *И. Г. Башмакова*

574. **Дьюла Сёкефальви-Надь (1887—1953)** (Gyula Szökefalvi-Nagy (1887—1953)), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 3—4, 179 (франц.); Acta scient. math., 1954, **15**, № 2, 97—98 (нем.)

См. РЖМат, 1954, 4313.

575. **Сто лет тому назад родился ученый и философ Анри Пуанкаре. Крибье** (Il y a cent ans naissait Henri Poincaré savant et philosophe. Cribier D.), Cahiers franç. inform., 1954, № 250, 1—3 (франц.)

576. **Себастиан Финстервальдер. Граф** (Sebastian Finsterwalder. Graf Heinrich), Jahresber. Dtsch. Math. Ver. (Abt. I), 1953, **56**, № 2—3, 27—31 (нем.)

Некролог Себастиана Финстервальдера, профессора математики Высшей технической школы в Мюнхене, скончавшегося 4 декабря 1951 г. в 90-летнем возрасте. *И. Г. Башмакова*

577 К. **Основные черты догреческой и греческой математической мысли. Брёйнс** (Fontes matheseos. Hoofdpunten van het praegriekse en griekse wiskundig denken (Fontes matheseos. Main features of pre-greek and greek mathematical thought). Bruins E. M., 12+168 pp., 6 pl., Brill, Leiden, 1953, 7.15 guilders), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 5, 493 (библ.)

578 К. **Математика в западной культуре. Клайн** (Mathematics in western culture. Kline Morris, 484 pp., Oxford University Press, New York, 1953, 7.50 doll.), Phys. Today, 1954, **7**, № 2, 22 (библ.)

579 К. **Арифметические исследования. Гаусс** Пер. с латин. (Recherches arithmétiques. Gauss C. F. Traduites par A. C. M. Poullet-Delisle, 1807, XX + 502 pp., Glanchard, Paris, 1953), Math. Gaz., 1953, **37**, № 322, XIV (библ).

580 РЕЦ. **Заметка Джамшида бен-Мас-уд-аль-Кази о длине окружности.** Пер. с араб. (Der Lehrbrief über den Kreisumfang von Gamsid B. Mas'ud Al Kasi. Aus dem Arabischen übersetzt von Luckey P., Berlin, Akademie-Verlag, 1950, VIII+95 S., ill., 4.80 doll.) [Рецензия: Прахар (Prachar K.), Monatsh. Math., 1953, **57**, № 3, 262 (нем.)]

581 Д. **О работах К. Маркса по математике. Рыбников К. А.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

См. также: 553, 554, 555, 556

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

582. **Некоторые замечания о частично рекурсивных функциях. Яничак** (Some remarks on partially recursive functions. Janiczak A.), Colloq. math., 1954, **3**, № 1, 37—38 (англ.)

Предлагаются три эквивалентных определения частично рекурсивной функции (ч. р. ф.), характеризующих это понятие посредством понятия общерекурсивной функции (о. р. ф.). Без доказательства формулируются предложения о ч. р. ф., среди которых основные:

1. Существует ч. р. ф., не совпадающая в своей области задания ни с какой о. р. ф.

2. Существует ч. р. ф., которая не мажорируется никакой о. р. ф.

3. Образы и прообразы рекурсивно перечислимых множеств, доставляемые ч. р. ф., также рекурсивно перечислимы.

4. Существует такая ч. р. ф. $f(n, x)$, что $g(n) = \{$наименьшему x из области определения функции $f_n(x) = f(n, x)$ такому, что $f(n, x) = 0\}$ не является ч. р. ф. *Б. А. Трахтенброт*

583. **Функции Шеффера в 3-значной логике. Мартин** (The Sheffer functions of 3-valued logic. Martin Norman M.), J. Symbolic Logic, 1954, **19**, № 1, 45—51 (англ.)

Известно, что в m-значной логике существуют функции, которые порождают все функции m-значной логики. Такие функции называются функциями Шеффера. (Автор реферируемой статьи в определение функции Шеффера дополнительно включает условие того, чтобы функция зависела от двух аргументов.) В статье исследуются характеристические свойства функций Шеффера, зависящих от двух аргументов.

Пусть D — некоторое разбиение множества значений истинности $\{1, 2, \ldots, m\}$ на более чем один непустой класс. Будем писать $i \sim (D)$, j если i и j входят в один класс разбиения D. Вводятся следующие определения:

1. Функция $f(p, q)$ сохраняет разбиение (the proper substitution property), если существует разбиение D такое, что для любых h, i, j и k из условия $h \sim j(D)$ и $i \sim k(D)$ следует $f(h, i) \sim f(j, k)(D)$.

2. Функция $f(p, q)$ инверсно сохраняет разбиение (the co-substitution property), если существует разбиение D такое, что для любых h, i, j и k из условия $f(h, i) \sim f(j, k)(D)$ следует $h \sim j(D)$ или $i \sim k(D)$.

Пусть $g^1(p) = g(p)$ и $g^{k+1}(p) = gg^k(p)$.

3. Функция от одного аргумента $g(p)$ называется t-функцией, если $t^m(j) = j$ для всех j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ и для любых i и j $(1 \leqslant i \leqslant m-1$, $1 \leqslant j \leqslant m)$ $t^i(j) \neq j$ $(g(p) \equiv t(p))$.

4. Функция $f(p, q)$ t-замкнута, если существует t-функция такая, что для любых i и j найдется такое k, что $f(t^i(p), t^j(p)) = t^k(p)$.

5. Функция $f(p, q)$ сохраняет множество (properly closing), если найдется собственное подмножество M множества значений истинности такое, что $f(M, M) \subset M$.

6. Функция $f(p, q)$ имеет свойство P, если она 1) не сохраняет разбиения, 2) инверсно не сохраняет разбиения, 3) не t-замкнута и 4) не сохраняет множества.

Автор устанавливает ряд теорем, имеющих вспомогательное значение. Отметим две из них. Первое предложение можно сформулировать так:

Если функция $f(p, q)$ порождает все функции одного аргумента, то она является функцией Шеффера.

Пусть функции одного переменного из 3-значной логики, за исключением $f(p) \equiv p$, разбиты на

классы следующим образом: U — константы; V, W и X — функции, принимающие два значения и сохраняющие соответственно ровно два, ровно одно и не сохраняющая ни одного значения; Z, Y — функции, принимающие три значения и соответственно сохраняющая ровно одно значение и не сохраняющая ни одного значения. Сформулируем второе предложение:

В 3-значной логике каждая функция $f(p, q)$, имеющая свойство P, является функцией Шеффера в том и только в том случае, если из нее можно получить одну функцию типа Y и одну функцию типа V соответственно (типа W или типа X). Опираясь на эти результаты, автор доказывает основную теорему.

Теорема. В 3-значной логике функция $f(p, q)$ является функцией Шеффера в том и только том случае, если она обладает свойством P.

Автор отмечает, что из 19683 функций от двух аргументов в 3-значной логике 3774 являются функциями Шеффера. Полученный результат является следствием теоремы, доказанной референтом (Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 6, 1153—1155) и выясняющей необходимые и достаточные условия полноты системы функций в 3-значной логике. (Функция удовлетворяет условию P, если она не входит в классы типа T, U и в S_{x+1}.) Из указанной теоремы следует также результат, обобщающий теорему Мартина для случая произвольного числа аргументов $n \geqslant 2$. *С. В. Яблонский*

584. **Формализация двузначного исчисления высказываний с самодвойственными примитивными.** Роз (A formalisation of the 2-valued propositional calculus with self-dual primitives. Rose Alan), Math. Ann., 1954, **127**, № 3, 255—257 (англ.)

Чёрч показал (Church A., Portug. math., 1948, 7, 87), что условная дизъюнкция $[X, Y, Z]$, имеющая такую же таблицу, как и $(X \& Y) \vee (Z \& \bar{Y})$, вместе с логическими константами t и f образуют примитивную систему, причем $[X, Y, Z]$ является самодвойственным оператором (см. РЖМат, 1954, 4322). Двойственная формула может быть получена путем замены символов $[X, Y, Z]$ на символы $[\bar{Z}, Y, X]$ и констант t на f и f на t. Если ввести отрицание как

$$\overline{\mathfrak{A}} =_{\text{df}} [f, \mathfrak{A}, t],$$

то правило получения двойственной формулы сохраняется. Автор дает следующую формализацию для построения Чёрча. Имеется одна аксиома A1. $\vdash t$ ($\vdash$ знак выводимости) и правила вывода: R1. Если $\vdash \mathfrak{A}$, то $\vdash [\mathfrak{A}, t, \mathfrak{B}]$; R2. Если $\vdash \mathfrak{A}$, то $\vdash [\mathfrak{B}, f, \mathfrak{A}]$; R3. Если $\vdash \mathfrak{A}$ и $[[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}], \mathfrak{E}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{F}, \mathfrak{D}]]$ часть формулы $\mathfrak{A}$, то формула, получающаяся из $\mathfrak{A}$ путем замены рассматриваемой части на $[\mathfrak{B}, [\mathfrak{C}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}], \mathfrak{D}]$, выводима; R4.* Если $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ формула порядка n, причем $\vdash \Phi(X_1, \ldots, X_{n-1}, t)$ и $\vdash \Phi(X_1, \ldots, X_{n-1}, f)$, то $\vdash \Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. В построенном исчислении имеет место теорема:

Любая тождественно истинная формула выводима (слабая полнота). Доказательство крайне простое.

В заметке устанавливается также, что упомянутые правила вывода независимы. Кроме того, показывается, что удобно ввести вспомогательные правила вывода (они выводимы из R1 — R3): R5. Если $\vdash [\overline{\mathfrak{C}}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}]$, то $\vdash [\mathfrak{C}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}]$; R1D. Если $\vdash \overline{\mathfrak{A}}$, то $\vdash [\mathfrak{B}, f, \mathfrak{A}]$; R2D. Если $\vdash \overline{\mathfrak{A}}$, то $\vdash [\mathfrak{A}, t, \mathfrak{B}]$.

Употребление всех перечисленных правил вывода позволяет легко доказать принцип двойственности: если $\vdash \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формула двойственная $\mathfrak{A}$, то $\vdash \mathfrak{B}$. *С. В. Яблонский*

585. **Система модальной логики.** Лукасевич (A system of modal logic. Łukasiewicz Jan), J. Computing Systems, 1953, **1**, 111—149 (англ.)

В первой части этой статьи Лукасевич строит «базисную модальную логику». Под этим подразумевается система, содержащая выражения «Δp» и «Γp», означающие «p возможно» и «p необходимо» соответственно и обладающая следующими восемью свойствами, в формулировках которых «$\vdash$» и «$\dashv$» означают утверждение и опровержение соответственно: $\vdash C p \Delta p$, $\dashv C \Delta p p$, $\dashv \Delta p$, $\vdash C \Gamma p p$, $\dashv C p \Gamma p$, $\dashv N \Gamma p$, $\vdash E \Delta p N \Gamma N p$, $\vdash E \Gamma p N \Delta N p$. Произвольная система называется «модальной логикой» тогда и только тогда, когда она содержит в качестве части базисную модальную логику.

Базисная модальная логика формализована посредством аксиом $\vdash C p \Delta p$, $\dashv C \Delta p p$, $\dashv \Delta p$, $\vdash E \Delta p \Delta N N p$ вместе с аксиомами классического исчисления высказываний, причем необходимость определяется через $\vdash E \Gamma p N \Delta N p$. Правила вывода — подстановка, modus ponens и соответствующие правила для опровержения. Даются доказательства независимости для четырех Δ-аксиом. Затем автор рассматривает аристотелевские теоремы модальной логики высказываний и показывает, что некоторые из соответствующих формул рассматриваемой системы не выводимы из аксиом.

Во второй части статьи рассматривается Ł-модальная система. Она содержит общий принцип экстенсиональности (объемности), $C E p q C \delta p \delta q$, где «$\delta$» означает переменный функтор. Ł-система формализуется посредством аксиом $\vdash C \delta p C \delta N p \delta q$, $\vdash C p \Delta p$, $\dashv C \Delta p p$, $\dashv \Delta p$ и приведенных правил вывода, причем правило подстановки берется в несколько обобщенной форме. Показывается независимость аксиом. Затем показывается, что приведенная ниже слева матрица адэкватна этой системе.

C	1	2	3	4	N	Δ
1*	1	2	3	4	4	1
2	1	1	3	3	3	1
3	1	2	1	2	2	3
4	1	1	1	1	1	3

	∇
1	1
2	2
3	1
4	2

Доказывается, что если функция ∇ имеет приведенную выше справа таблицу истинности, то если ∇, Δ не входят в P, Q соответственно и Q получается из P заменой всюду Δ на ∇, то P удовлетворяет этим матрицам тогда и только тогда, когда Q удовлетворяет им. Это правило подстановки не распространяется на формулы, содержащие оба знака Δ и ∇. $\Delta \nabla p$ удовлетворяет матрицам, а $\Delta \Delta p$ — не удовлетворяет.

Затем рассматриваются некоторые доказуемые формулы L-модальной логики и показывается, что существуют формулы P такие, что $\dashv P$ и $\vdash \Delta P$. Статья заканчивается рассмотрением некоторых спорных вопросов. *A. Rose*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 1, 2.

586. **Логическая функция меры. Кемени** (A logical measure function. Kemeny John G.), J. Symbolic Logic, 1953, 18, № 4, 289—308 (англ.)

Пусть W — формула узкого исчисления предикатов, в которой встречаются p_0 предметных констант и p_h h-местных предикатов. Через M_n обозначается число всевозможных интерпретаций этой системы констант и предикатов в предметной области из n элементов, и через M_n^W — число тех интерпретаций, при которых формула W оказывается справедливой. (В статье ошибочно указывается, что $M_n = \sum_h p_h \times 2^{n^h} + n\,(n-1)\ldots$ $\ldots(n-p_0+1)$; на самом же деле $M_n = \prod_h 2^{n^h \cdot p_h} \cdot n \times$ $\times\,(n-1)\ldots(n-p_0+1)$). Логической мерой $m\,(W)$ формулы W оказывается функция аргумента n M_n^W / M_n. Это понятие вводится аналогично и для формул более сложных логических исчислений, например ступенчатых исчислений. Формулируются без доказательства теоремы, облегчающие подсчет меры для некоторых классов формул. Меры частично упорядочиваются соглашением $m\,(W_1) > m\,(W_2)$, если, начиная с некоторого аргумента n_0, значения первой функции больше значений второй; при этом наименьшую меру (тождественный 0) имеют формулы, неинтерпретируемые в конечном, и наибольшую — формулы, тождественные в конечном (тождественная 1). В смысле этого порядка формулы узкого исчисления одноместных предикатов всегда сравнимы, но существуют более сложные формулы, которые несравнимы. Из невозможности алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах автор выводит невозможность алгорифма сравнения формул (по мере). Через логическую меру m определяется функция: $s = -\log_2 m$, которая может служить «мерой строгости» формулы; в частности, если формулы A, B не имеют общих предикатных символов, то $s\,(AB) = s\,(A) + s\,(B)$.

Автор усматривает значение введенных понятий в том, что на их основе можно формально уточнить (в виде определений) интуитивные представления о «степени теоретизации некоторого текста» и «степени фактического подтверждения гипотезы» и др., и утверждает: «разнообразные логические меры такого рода сыграли фундаментальную роль в развитии логики и философии наук». Последнее утверждение в статье не обосновывается.

Б. А. Трахтенброт

587. **Онтологическое и оперативное понимание логики. Лоренцен** (Die ontologische und die operative Auffassung der Logik. Lorenzen Paul), Actes du XI-ème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, 5, 12—18. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953) (нем.)

588. **Символизм в математике и логике. Каллахан** (Symbolism in mathematics and logic. Callahan J. J.), Actes du XI-ème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, 5, 166—171. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953 (англ.)

589. **Что такое конвенционализм? Динглер** (Was ist konventionalismus? Dingler Hugo), Actes du XI-ème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, 5, 199—204. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953 (нем.)

590. **О связи между существованием и непротиворечивостью. Шмидт** (Zum Verhältnis von Existenz und Widerspruchsfreiheit. Schmidt Arnold), Actes du XI-ème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, 5, 205—207. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953 (нем.)

591. **Пеано и Бурали-Форти — предшественники комбинаторной логики. Фейс** (Peano et Burali-Forti, précurseurs de la logique combinatoire. Feys Robert), Actes du XI-ème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, 5, 70—72. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953 (франц.)

592 К. **Логика для математиков. Россер** (Logic for mathematicians. Rosser J. Barkley (International series in pure and applied mathematics), XIV+530 pp., McGraw-Hill Publ. Co. Ltd., London, 86 s.) (англ.)

Цель автора — познакомить математиков с логическим аппаратом, необходимым для построения математики. В этой связи основная задача книги — изложить формальное построение современной математики на основе некоторой системы аксиом, не скомпрометированной известными парадоксами. Такие результаты математической логики, как теоремы Гёделя о неполноте и Чёрча о неразрешимости проблемы разрешимости, только упоминаются без доказательства. Более простые вопросы — полнота классической логики высказываний, различие между вещью и ее именем — рассматриваются подробно. Но большая часть книги (стр. 197—516) посвящена построению математики на основе теоретико-множественной системы аксиом Куайна, известной под названием New Foundations (Quine W. V., Amer. Math., Monthly, 1937, **44**, 70—80). К описанию этого построения мы и переходим.

Имеется лишь один вид переменных — переменные множества; из этих переменных с помощью символов $\in$, ι, &, $\sim$ (отрицание) и скобок обычным образом строятся термы и формулы и при этом различаются свободные и связанные вхождения переменных (в индуктивном определении этих понятий на стр. 208 нет никаких ограничений на образование терма или формулы, связанных с коллизией или невхождением переменной в формулу или терм, так что, например $(y)\,(x)\,(x)\,(x \in x)$ есть формула; терм $\iota x P$, где P — формула, содержательно означает «x такой, что P»). $\vee$, $\supset$ и

квантор существования вводятся обычным образом. Вместо аксиом употребляются схемы аксиом. В них $\{\text{Sub in } S : A_1 \text{ for } x_1, \ldots, A_n \text{ for } x_n\}$, или, как мы будем писать короче, $\mathrm{Sb}_{A_1 \ldots A_n}^{x_1 \ldots x_n} S$, означает результат замены каждого свободного вхождения каждого x_i $(i \leqslant n)$ на A_i; говорят, что эта подстановка вызывает смешение связанных переменных, если некоторое свободное вхождение x_i в S $(i \leqslant n)$ оказывается в области действия некоторого квантора или ι-оператора по переменной, которая в A_i входит свободно. Принимается соглашение, что каждая аксиома переходит в аксиому же, если на нее навесить квантор общности по любой переменной. Это соглашение вместе со схемами 4—6 (см. ниже) дает возможность обойтись при выводах одним только правилом modus ponens $\left(\text{т. е. } \dfrac{P, P \supset Q}{Q}\right)$.

Центральную роль во всей теории играет понятие выпрямимой (stratified) формулы. Формула S называется выпрямимой, если каждому вхождению в S каждой переменной можно приписать целое число (так называемый «тип») в качестве индекса таким образом, что:

a) если x — переменная, а P — формула, являющаяся частью S, то всем вхождениям x, которые свободны в P, приписывается один и тот же индекс в S;

b) если x — переменная, входящая свободно в P, то для каждого вхождения $(x)P$ или $(\iota x)P$ в S явно указанному вхождению x приписывается в S тот же индекс, что и свободным в P вхождениям этой переменной x;

c) для каждой части S вида $(x \in y)$, $(\iota x P \in y)$, $(x \in \iota y Q)$, $(\iota x P \in \iota y Q)$ индекс, приписанный в S явно указанному только что вхождению y, на единицу больше, чем такой же индекс для x.

Это определение относится только к формулам, не содержащим сокращений. Формула, содержащая сокращения, считается выпрямимой, если выпрямима формула, получающаяся из нее путем устранения сокращений. Например $A = B$, или подробнее $A = {}_x B$, рассматривается как сокращение для $(x)(x \in A \equiv x \in B)$. В соответствии с этим для выпрямимости формул, содержащих $=$, к a) — c), надо добавить еще пункт

d) для каждого вхождения в S части вида $x = y$, $\iota x P = y$, $x = \iota y Q$, $\iota x P = \iota y Q$ явно указанным вхождениям x и y приписывается в S один и тот же тип.

Тогда в формулах указанного типа можно при проверке выпрямимости обойтись без замены $A = B$ развернутым выражением. Формула $A = B$ выпрямима тогда и только тогда, когда входящим в нее переменным можно приписать индексы таким образом, что A и B получают один и тот же тип (я воспроизвожу в этом изложении небрежность автора; конечно, следовало бы формально распространить понятие выпрямимости на термы и приписать смысл последней фразе. *Прим. реф.*) $(E_1 x)P$ означает $(Ey)(x).\ y = x \equiv P$, где y отлично от x и не входит свободно в P. Схемы аксиом таковы (надо иметь в виду принятое выше соглашение для этих и дальнейших схем; PQ означает $P \,\&\, Q$):

1. $P \supset PP$.
2. $PQ \supset P$.
3. $(P \supset Q) \supset (\sim (QR) \supset \sim (RP))$.
4. $(x).\ P \supset Q : \supset : (x)\, P \supset (x)\, Q$.
5. $P \supset (x)P$, если x не входит свободно в P.
6. $(x)\, P \supset \mathrm{Sb}_y^x P$, если эта подстановка не вызывает смешения связанных переменных.
7. $(x, y, z) : x = y . \supset . x \in z \supset y \in z$, если x, y, z — различные переменные.
8. $(x)\, P \supset \mathrm{Sb}_{\iota y Q}^x P$, если указанная здесь подстановка не вызывает смешения связанных переменных.
9. $(x).\ P \equiv Q : \supset : \iota x P = \iota x Q$.
10. Если Q есть $\mathrm{Sb}_x^y P$ и P есть $\mathrm{Sb}_x^y Q$, то $\iota x P = \iota y Q$.
11. $(E_1 x)\, P : \supset : (x).\ \iota x P = x \equiv P$.
12. $(Ey)\,(x).\ x \in y \equiv P$, если x и y — различные переменные, y не входит свободно в P и P — выпрямимая формула.

Схемы 1—3 лежат в основе исчисления высказываний, аксиома 7 — это «аксиома объемности», схемы 8—11 — это схемы для «описаний», т. е. выражений вида $\iota x P$. Схема аксиом 12 выражает основной принцип теории множеств — принцип образования множеств с данным свойством P; условие выпрямимости P является тем ограничением, благодаря которому отпадают парадоксы. Важно отметить, что это ограничение не влечет существенных для математики потерь.

Определения (сокращения) вводятся следующим образом: $\hat{x}P$ означает $\iota\alpha\,(x).\ x \in \alpha \equiv P$, V означает $\hat{x}\,(x = x)$, Λ — $\hat{x}\,(x \neq x)$ $(x \neq y$ есть $\sim x = y)$, $A \cap B$ — $\hat{x}\,(x \in A \,\&\, x \in B)$ $A \cup B$ — $\hat{x}\,(x \in A \vee x \in B)$, $\overline{A}$ — $\hat{x}\,(\sim x \in A)$.

Далее: если $y_1, \ldots, y_n$ — все различные переменные, входящие свободно в A или P, а x не входит ни в A ни в P, то $\{A \mid P\}$ означает $\hat{x}\,(Ey_1, \ldots, y_n)\, x = A . P$. $\{A\}$ означает $\hat{x}\,(x = A)$, $\{A, B\}$ — $\{A\} \cup \{B\}$, USC (A) — $\{\{x\} \mid x \in A\}$, USC^2 — USC (USC (A)), 0 — $\{1\}$, 1 — USC (V); $A + B = \{\alpha \cup \beta \mid \alpha \in A \,\&\, \beta \in B \,\&\, \alpha \cap \beta = \Lambda\}$, где α и β различны и не входят ни в A, ни B, Nn (множество неотрицательных (non negative) чисел) означает

$$\hat{x}((\beta) : : 0 \in \beta : (y) \cdot y \in \beta \supset y + 1 \in \beta : . \supset : . x \in \beta)$$

(это множество существует по схеме 12, так как задается выпрямимой формулой). Легко доказывается, что выпрямимые свойства чисел можно доказывать по индукции. Автором вводится в качестве аксиомы бесконечности еще следующая схема:

13. $(m, n) : m, n \in \mathrm{Nn} \,\&\, m + 1 = n + 1 . \supset . m = n$,

но ее можно вывести из предыдущих (РЖМат, 1954, 4325).

Отношения рассматриваются как множества упорядоченных пар $\langle A, B\rangle$. При этом $\langle A, B\rangle$ определяется как некоторый терм, которому может быть приписан тот же тип, что и термам A и B, коль скоро последним может быть приписан один и тот же тип, а именно:

$\varphi(A)$ означает $\hat{y}\,(Ex).\ : x \in A : x \in \mathrm{Nn}.\ y = x + 1 : V : \sim x \in \mathrm{Nn}.\ y = x$,

$\theta_1(A)$ означает $\{\varphi(x) \mid x \in A\}$,

$\theta_2(A)$ означает $\{\{0\} \cup \varphi(x) \mid x \in A\}$,

$\langle A, B\rangle$ означает $\theta_1(A) \cup \theta_2(B)$

(легко видеть, что по $\langle A, B\rangle$ можно однозначно восстановить A и B). $\langle A, B, C\rangle$ определяется как

$\ll A, B>, C>$ и т. д. $\hat{x}\hat{y}F(x, y)$ означает отношение, имеющее место между x и y тогда и только тогда, когда $F(x, y)$; это отношение существует, если $F(x, y)$ — выпрямимая формула и притом такая, что при некотором ее «выпрямлении» переменным x и y приписывается один и тот же тип.

Благодаря последней оговорке не удается определить отношение $\hat{x}\hat{y}(x = \{y\})$; если бы это удалось, получились бы парадоксы Рассела, Кантора и Бурали-Форти. В то же время, для тех отношений, которые существенны для математики, как правило, удается построить представляющее отношение в рассматриваемой системе — например, если при некотором выпрямлении $F(x, y)$ x получает тип на 2 выше, чем y, то можно образовать отношение $\hat{x}\hat{z}((Ey).F(x, y).z = \{\{y\}\})$.

Вместо теоремы Кантора о том, что множество не может быть эквивалентно множеству всех своих подмножеств, здесь удается доказательство следующей теоремы: множество одноэлементных подмножеств любого множества α не может быть эквивалентно множеству всех подмножеств этого множества (в обозначениях автора $(\alpha) \sim (\mathrm{USC}(\alpha)\ \mathrm{sm}\ \mathrm{SC}(\alpha))$). Если множество α эквивалентно множеству одноэлементных подмножеств α, оно называется канторовским. ($\mathrm{Can}(\alpha)$ означает $\alpha\ \mathrm{sm}\ \mathrm{USC}(\alpha)$). Если при этом отображение α на $\mathrm{USC}(\alpha)$ можно осуществить путем соотнесения $\{x\}$ каждому $x \in \alpha$, то α называется сильно канторовским. Парадоксы Кантора и Рассела показывают, что универсальный класс V не является канторовским.

Мощность множества трактуется как множество всех множеств, эквивалентных данному. Аналогично строится теория порядковых типов, причем теорема о том, что каждое порядковое число имеет тот же тип, что и множество меньших порядковых типов, заменяется следующей:

$$(P, \varphi) : . P \in \varphi . \varphi \in \mathrm{NO} : \supset . \mathrm{RUSC}^2(P)\ \mathrm{smor}\ (\mathrm{seg}_\varphi \leqslant_0).$$

Здесь NO — множество всех порядковых чисел, $\mathrm{RUSC}^2(A)$ означает $\mathrm{RUSC}(\mathrm{RUSC}(A))$, а $\mathrm{RUSC}(A)$ — $-\{<\{x\}, \{y\}> | <x, y> \in A\}$, smor означает подобие, $\leqslant_0$ — классическое упорядочение порядковых чисел.

Доказывается канторовость каждого из чисел 0, 1, 2, ... и канторовость элементов k, где k — произвольное фиксированное натуральное число, но, повидимому, из-за невыпрямимости соответствующей формулы, этого недостаточно для доказательства канторовости каждого конечного множества. В этой связи вводится дальнейшая аксиома счета:

$$(n) : n \in \mathrm{Nn} . \supset . \hat{m}(m \in \mathrm{Nn}.\ 0 < m \leqslant n) \in n\ ,$$

из которой вытекает канторовость каждого конечного множества (т. е. $(\alpha) : \alpha \in \mathrm{Fin} . \supset . \mathrm{Can}(\alpha)$, где Fin есть $\bigcup \mathrm{Nn}$) и сильная канторовость Nn, а также всех конечных, счетных множеств и множеств мощности $\aleph_1$, а также мощность 2^m, где m — сильно канторовская мощность; если поле отношения P сильно канторово, то P подобно $\mathrm{RUSC}(P)$.

Для многих рассуждений классической математики необходима аксиома выбора. $\mathrm{AxC}(n)$ означает утверждение, что для каждого множества непустых попарно не пересекающихся множеств, имеющего мощность $\leqslant n$, существует множество, пересекающееся ровно по одноэлементному множеству с каждым из его элементов. Автор принимает $\mathrm{Ax}(\mathrm{Den})$, где Den — мощность Nn, и тогда получаются основные результаты классической математики, но не теорема о существовании неизмеримых множеств, например, которая требует более сильной формы аксиомы выбора. Что касается аксиомы выбора в ее общей формулировке, автор доказывает ее эквивалентность с теоремой Цермело, леммой Цорна и теоремой о сравнимости двух любых мощностей, отмечая значительно большую спорность, получающейся от ее присоединения аксиоматики (в настоящее время известно, что такая аксиоматика просто противоречива, см. РЖМат, 1954, 4325).

Непротиворечивость системы Куайна автором не доказывается и не указывается никаких путей к ее доказательству. В соответствии с указанной в начале реферата целью книги, в ней содержится много примеров, существенных для формализации различных разделов математики (теория функций, топология, абстрактная алгебра и др.).

А. С. Есенин-Вольпин

593 К. Некоторые классы рекурсивных функций. Гжегорчик (Some classes of recursive functions. Grzegorczyk Andrzej, 44 S., 2 nlb. (Inst. Mat. Polsk. Akad. Nauk. Rozprawy Matematyczne, 4), Warszawa, 1953, zl. 7), Przew. bibliogr., 1953, 9 (21), № 43, 562 (библ.)

См. также: 570

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

594. О некоторых множествах целых чисел. II. Рот (On certain sets of integers. II. Roth K. F.), J. London Math. Soc., 1954, 29, ч. 1, № 113, 20—26 (англ.)

Пусть $(a_{\mu\nu})$ — фиксированная целочисленная матрица с l строками и n столбцами. Множество различных чисел называется A-множеством, если система уравнений $\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}x_\nu = 0$, $\mu = 1, \ldots, l$, не имеет решений в рассматриваемом множестве с $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Через $A(x)$ обозначается наибольшая длина A-множества, которое можно составить из чисел $1, 2, \ldots, x$. A-множества первой части работы автора (РЖМат, 1953, 52) соответствуют однострочной матрице $(1, -2, 1)$. Доказывается, что, если матрица удовлетворяет двум условиям (из которых первое является необходимым), то $A(x) = o(x)$. Как первая, так и вторая работы автора интересны как новая сфера действия метода тригонометрических сумм.

А. Г. Постников

595. Об одной связи между рядом Фарея и гипотезой Римана о нулях функции ζ. Копрши-

в а (O jednom vztahu Fareyovy řady k Riemannově domněnce o nulových dobech funkce ζ. К о р ř i v a J i ř í), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 49—55 (чем.)

Доказывается, что каждая из оценок

$$\sum_{0<r<1/2} (r - 1/4) \ll q^{1/2+\varepsilon}, \quad \sum_{0<r<1} (r^2 - 1/3) \ll q^{1/2+\varepsilon},$$

$$\sum_{0<r<1} (r^3 - 1/4) \ll q^{1/2+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, а суммы берутся по всем дробям Фарея r, лежащим в указанных интервалах со знаменателями $\leqslant q$, равносильна соотношению

$$\sum_{n \leqslant q} \mu(n) \ll q^{1/2+\varepsilon}$$

(знак $\ll$ И. М. Виноградова, как обычно, употребляется в смысле O). Здесь $\mu(n)$ — функция Мёбиуса. Отсюда по известной теореме Литлвуда (Littlewood J. E., C. r. Acad. sci., 1912, **154**, 263—266) следует эквивалентность этих оценок гипотезе Римана.

Эти результаты аналогичны известным результатам Франеля (Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig, Teubner, 1927, Bd. **2**, 167—177).

И. П. Кубилюс

596. Два ряда разбиений. С а н д е м (Two series of partitions. S a n d h a m H. F.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 104—106 (англ.)

Хорошо известно

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n,$$

где q — переменная, по модулю меньшая единицы, $p(n)$ — число представлений n в виде суммы равных или неравных целых положительных слагаемых, причем число слагаемых может быть произвольно.

В реферируемой статье даны формулы:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}+\theta}} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}+\theta\right)}}{\operatorname{ch} 3\pi\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}+\theta\right)}} = \frac{1}{\pi\theta\sqrt{2}}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)\,(n-\theta)}{\operatorname{ch} \pi\sqrt{2n-\frac{1}{4}+4\theta}} = 0 \quad (\theta > 0).$$

Доказательство основывается на почленном интегрировании тождеств Эйлера и Якоби

$$q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) = q^{1^2/24} - q^{5^2/24} - q^{7^2/24} + q^{11^2/24} + \ldots,$$

$$q^{1/8} \left(\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)\right)^3 = 1q^{1^2/8} - 3q^{3^2/8} + 5q^{5^2/8} - 7q^{7^2/8} + \ldots$$

Г. А. Ломадзе

597. О представлении натурального числа как суммы простых, принадлежащих данным прогрессиям плюс данная квадратичная форма. Ц у л а у ф (Über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Primzahlen aus gegebenen Restklassen und Quadraten mit gegebenen Koeffizienten. I. Z u l a u f A c h i m), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 3—4, 210—229 (нем.)

Доказывается, что всякое достаточно большое натуральное число n представимо в виде

$$n = \sum_{\sigma=1}^{s} p_\sigma + \sum_{\tau=1}^{t} b_\tau g_\tau^2, \qquad (1)$$

где s, t и $b_\tau > 0$ — целые фиксированные числа, g_τ — целые, p_σ — простые, удовлетворяющие условиям

$$p_\sigma \equiv a_\sigma \pmod{K_\sigma},$$

где a_σ, K_σ фиксированы.

Работа является обобщением работы того же автора (J. Math., 1952, **190**, 169—198). Доказательство (1) проведено методом плотности нулей L-функций Линника. Автор следует статье Н. Г. Чудакова (Tchudakoff N., Ann. Math., 1947, **48**, 515—542).

В. М. Архангельская

598. Распределение квадратических и высших вычетов. Д а в е н п о р т, Э р д ё ш (The distribution of quadratic and higher residues. D a v e n p o r t H., E r d ö s P.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 252—265 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Две теоремы этой работы повторяют хорошо известные оценки наименьших степенных невычетов. Несколько видоизменены обычные доказательства. В двух других теоремах доказывается, что в каждом классе невычетов степени $k > 2$, по достаточно большому простому модулю p, существует положительное число, не превосходящее $p^{1/2-\eta}$, где $\eta > 0$ зависит только от k.

Специально рассматриваются классы кубических невычетов. Для них аналогичная оценка имеет вид $p^{\gamma+\varepsilon}$, где $\gamma = (2u)^{-1}$ и u есть корень уравнения

$$\ln u + \int_1^{2u-1} \frac{\ln t}{1+t}\, dt = \frac{1}{3},$$

$\varepsilon > 0$ фиксировано и p достаточно велико.

Последняя теорема формулируется следующим образом. Пусть h есть функция от p, удовлетворяющая условиям: $h \to \infty$, $\frac{\ln h}{\ln p} \to 0$ при $p \to \infty$. $S_h(x) = \sum_{n=x+1}^{x+h} \left(\frac{n}{p}\right)$, $\left(\frac{n}{p}\right)$ — символ Лежандра и $M_p(\lambda)$ обозначает число целых $x \in [0, p-1]$ таких, что $S_h(x) \leqslant \lambda h^{1/2}$. Тогда

$$\frac{1}{p} M_p(\lambda) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-t^2/2}\, dt,$$

когда $p \to \infty$ при каждом фиксированном λ.

К. А. Родосский

599. Неоднородные решетки. Суиннертон-Дайер (Inhomogeneous lattices. Swinnerton-Dyer H. P. F.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 1, 20—25 (англ.)

Пусть Λ — решетка в n-мерном евклидовом пространстве R^n и $d(\Lambda)>0$ — абсолютная величина определителя из координат n основных векторов Λ. Решетка называется однородной, если одна из ее точек совпадает с началом координат O. Пусть K — данное непустое открытое множество в R^n. Решетку Λ называем K-допустимой, если ее точки не лежат в K; пусть $\Delta(K)$ — точная нижняя граница множества чисел $d(\Lambda)$ для всех K-допустимых решеток Λ (в отдельных случаях может быть $\Delta(K)=0$ или $\Delta(K)=+\infty$). Если $0<\Delta(K)<+\infty$, то K-допустимую решетку с $d(\Lambda)=\Delta(K)$ называем критической. Линейное преобразование R^n вида $x_i'=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ ($i=1, 2, \ldots, n$, определитель $|a_{ij}|=\pm 1$), переводящее K в себя, называем автоморфизмом K. Множество K называем автоморфным, если каждая точка замыкания K надлежаще выбранным автоморфизмом K переводится в ограниченную часть R^n. Через R_0 обозначим замыкание множества граничных для K точек P, обладающих свойством: на отрезке OP имеются точки K, сколь угодно близкие к P. Доказывается теорема:

Пусть K автоморфно и удовлетворяет условию: всякая прямая в R^n, проходящая через точку R_0, содержит и точку K; тогда $\Delta(K)>0$. Если, кроме того, $\Delta(K)<+\infty$, то существует критическая решетка для K, содержащая точку R_0.

Аналогичные факты для однородных решеток были установлены ранее Малером (Mahler K., Proc. Roy. Soc., 1946, **A187**, 151—187). *Б. А. Венков*

600. О представлении вещественных чисел произведением рациональных чисел. Оппенгейм (On the representation of real numbers by products of rational numbers. Oppenheim A.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 16, 303—307 (англ.)

Работа посвящена обобщению исследования Кантора (Cantor G., Collect. Papers, 1932, 43—50) о представлении вещественных чисел произведением рациональных. Пусть дана последовательность целых положительных чисел n_i; дается алгоритм для представления любого числа $x>1$ в форме

$$x=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{n_i}{d_i}\right), \qquad (1)$$

при этом найденные числа d_i обладают свойствами

$$1\leqslant d_1\leqslant d_2\leqslant d_3\ldots\to\infty \text{ и } d_{i+1}>\frac{n_{i+1}}{n_i}(d_i-1)(d_i+n_i).$$

Даются условия того, что в сходящемся произведении вида (1) d_i получаются из заданной последовательности n_i алгоритмом автора, и дается в этом случае критерий рациональности числа x. *А. Г. Постников*

601. О суммах множеств целых чисел. Кемперман, Шерк (On sums of sets of integers. Kemperman J. H. B., Scherk Peter), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 2, 238—252 (англ.)

Рассматривается упорядоченная группа, т. е. аддитивно записанная коммутативная группа $G=\{g, g', \ldots\}$ с транзитивным упорядочением таким что из $g'<g''$ следует $g+g'<g+g''$.

Вводятся обозначения: I — множество всех g, удовлетворяющих условию $0\leqslant g\leqslant n$, где $n\in G$, $n>0$. $A, B, \ldots$ — подмножества I. $A+B$ обозначает множество всех элементов вида $a+b$, где $a\in A$, $b\in B$. $A\oplus B=(A+B)\cap I$. $C\ominus A=D$, где D — максимальное подмножество I такое, что $A\oplus D=C$.

$$A(g)=\sum_{\substack{0<d\leqslant g\\ d\in A}}1; \quad A[g]=\sum_{\substack{0<d<g\\ d\in A}}1.$$

Доказываются две основные теоремы:

Теорема 1. Пусть A, B, C — конечные подмножества I, $A\oplus B\subset C$ и $0\in A$, $0\in B$, $n\notin C$.

Тогда существует $m\in G$ со следующими свойствами:

$$C(n)-C(n-m)\geqslant A(m)+B(m),$$
$$m=n \text{ или } 0<2m<n,$$
$$n-m\in C\ominus A, \quad n-m\in C\ominus B.$$

Теорема 2. Пусть A, B, C — конечные подмножества I, $A\oplus B\subset C$, $0\in A$, $0\in B$ и $C(n)<A(n)+B(n)$. Тогда существует $m\in G$ со следующими свойствами:

$$C(n)-C(n-m)\geqslant A(m)+B(m)-1, \quad 0<m\leqslant n,$$
$$m\in A, \quad m\in B \text{ и } \lambda m\in C\ominus A, \quad \lambda m\in C\ominus B$$

для каждого целого λ такого, что $\lambda m\in I$.

Доказательство теорем основано на применении метода канонических расширений Артина и Шерка (Хинчин А. Я., Три жемчужины теории чисел, М.—Л., 1948). Из этих теорем следуют частные теоремы для случая, когда G есть группа рациональных целых чисел. Одну такую теорему, содержащуюся в теореме 11 Манна (Mann H. B., Ann. Math., 1942, **43**, 523—527), авторы формулируют в начале статьи, выводя из нее новые теоремы с помощью принципа инверсии А. Я. Хинчина (Матем. сб., 1932, **39**, 27—34). Этот принцип применяется и к общим теоремам.

Каждая из рассматриваемых теорем дает известный результат Манна о плотности суммы двух множеств (см. цитированную книгу А. Я. Хинчина).

Авторы указывают, что теоремы 1 и 2 остаются верными и тогда, когда

$$A(g)=\sum_{\substack{0<d\leqslant g\\ d\in A}}f(d),$$

где $f(d)$ есть любая неотрицательная и невозрастающая функция, принимающая действительные значения.

Вариант теоремы 2 применяется для доказательства следующей теоремы:

Пусть $g^*\in G$, $g^*>0$, и пусть A и B — конечные подмножества G, $0\in A$, $0\in B$. Пусть $f(g)$ — функция, принимающая действительные значения, определенная для всех положительных $g\in G$ и такая, что из $g\leqslant g'+g''$ следует $f(g)\leqslant f(g')+f(g'')+1$. Пусть, наконец, $A[h]+B[h]\geqslant f(h)$ для каждого $h\in G$, $0<h\leqslant g^*$. Тогда множество $C=A+B$ удовлетворяет условию $C[h]\geqslant f(h)$ для таких элементов h. *Б. М. Бредихин*

602. О хаусдорфовой размерности множеств, характеризующихся числовыми свойствами. IV. Фолькман (Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. IV. Volkmann Bodo), Math. Z., 1954, **59**, № 5, 425—433 (нем.)

Части I — III см. РЖМат, 1954, 2547; 1955, 41, 42.

Пусть α — действительное число, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и $G(\alpha)$ — множество чисел η, двоичное разложение которых $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} e_i$ ($e_i = 0$ или 1; бесконечно много $e_i \neq 0$) удовлетворяет условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i = \alpha.$$

Как показано Безиковичем (Besicovitch A. S., Math. Ann., 1934, **110**, 321—330), имеет место следующее соотношение:

$$\dim G(\alpha) = \frac{\alpha \log \alpha + (1-\alpha)\log(1-\alpha)}{\log \frac{1}{2}}, \qquad (1)$$

где $\dim G(\alpha)$ — дробная размерность $G(\alpha)$ в смысле Хаусдорфа.

Автор обобщает соотношение (1) на случай g-адических разложений чисел η, $g \geqslant 2$. *И. Е. Жак*

603. О $\overline{\lim\limits_{x \to +\infty}} x|\vartheta x + \alpha - y|$. Касселс (Über $\overline{\lim\limits_{x \to +\infty}} x|\vartheta x + \alpha - y|$. Cassels J. W. S.), Math. Ann., 1954, **127**, № 3, 288—304 (нем.)

Пусть x, y — целые числа, ϑ — иррациональное вещественное число и

$$A(\vartheta, \alpha) = \overline{\lim_{x \to +\infty}} x|\vartheta x + \alpha - y|.$$

Доказывается, что если $A(\vartheta, \alpha) > 4/11$, то ϑ и α являются числами поля $K(\sqrt{7})$, устанавливается их линейная зависимость и вычисляется $A(\vartheta, \alpha) = 27/28\sqrt{7}$. Для всех остальных ϑ, α имеет место $A(\vartheta, \alpha) \leqslant 4/11$. *Э. К. Фогелс*

604. Об аппроксимации комплексных чисел. Хофрейтер (Über die Approximation von komplexen Zahlen. Hofreiter Nikolaus), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 125—127 (нем.)

Как известно, число $1/\sqrt{5}$ является наименьшим значением постоянной c, для которого неравенство $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{c}{|q|^2}$ имеет, при любом иррациональном ξ, бесконечное множество решений в целых числах p, q ($q > 0$).

Можно поставить такой вопрос: найти наименьшее значение постоянной c, при котором это неравенство имеет для любого иррационального ξ хотя бы одно решение в целых числах p, q ($q > 0$).

Автор отвечает на этот вопрос для комплексных чисел, доказывая, что каждому комплексному числу ξ соответствует хотя бы одна пара целых чисел p, q ($q \neq 0$), $(p, q) = 1$, поля $K(i)$, для которых выполняется неравенство

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{|q|^2}, \qquad \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} \sim 0{,}52\right).$$

Отмечается, что при $\xi = (1 + i\sqrt{3})/2$ и $c < \sqrt{2+\sqrt{3}}$ последнее неравенство не имеет целых решений в $K(i)$ и, следовательно, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ является наименьшим значением c.

Приводится геометрическое истолкование задачи и даются наброски доказательства.

Далее приводится следующий результат Прасада (Prasad) по последнему вопросу, но для действительных чисел: любому действительному числу ξ соответствует хотя бы одна пара целых чисел p, q, $(p, q) = 1$, для которых выполняется неравенство

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{2}{(\sqrt{5}+3)q^2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}+3} \sim 0{,}38\right).$$

П. Г. Когония

605. О точках, не попадающих в покрытие множества рациональных точек. Куджани (Sui punti esclusi dalle coperture dell'insieme razionale. Cugiani Marco), Boll. Unione mat. ital., 1953, **8**, № 3, 294—303 (итал.)

Статья посвящена решению вопроса о покрытии или непокрытии данной иррациональной точки отрезка [0,1] некоторым открытым множеством произвольно малой меры, которым покрыто множество всех рациональных точек [0,1]. Результаты статьи почти непосредственно следуют из известных фактов теории множеств и диофантовых приближений. *А. С. Кованько*

606. О диофантовом уравнении $x^3 - y^3 = 2z^2$. Родеха (Sobre la ecuacion diofantica $x^3 - y^3 = 2z^2$. G.-Rodeja F., E.), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, **13**, № 4, 229—240 (исп.)

Найдены все решения в целых числах уравнения, указанного в заглавии. Решения параметрические. Частный класс решений этого уравнения был получен раньше Алефом (Alef, Rev. mat. hisp.-amer., 1952, **12**, 3—8). *И. П. Кубилюс*

607. О диофантовом уравнении $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$. Розати (Sull'equazione diofantea $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$. Rosati Luigi Antonio), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 1, 59—63 (итал.)

П. Эрдёш высказал предположение, что диофантово уравнение

$$4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 \qquad (1)$$

разрешимо в целых положительных числах x_1, x_2, x_3 при любом n. В статье Облата (Obláth R., Mathesis, 1950, **59**, 308—316) показано, что вышеупомянутое предположение будет верно, если будет установлено, что (1) разрешимо для всех простых n. Там же уравнение (1) разрешено для частных значений n. Далее показано, что (1) имеет решения для всех $n < 106\,129$. В реферируемой статье дано необходимое и достаточное условие того, чтобы

уравнение (1) было разрешимо при фиксированном простом n. Затем автор дает эффективные решения (1) для $106\,129 \leqslant n < 141\,649$. Таким образом, справедливость предположения Эрдёша проверена для всех целых $n < 141\,649$. *Г. А. Ломадзе*

608. Три диофантовы проблемы. Мёснер (Drei diophantische Probleme. Moessner Alfred), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, 8, № 3, 191—193 (нем.; резюме хорв.)

Решены в целых числах три системы неопределенных уравнений 1—5 степеней с 12 неизвестными при помощи двух параметров. *В. А. Голубев*

609. Некоторые специальные уравнения в конечном поле. Карлиц (Certain special equations in a finite field. Carlitz L.), Monatsh. Math., 1954, 58, № 1, 5—12 (англ.)

В конечном поле порядка $q = p^n$ рассматривается вопрос о числе решений уравнений вида $a_1x_1^2 + \dots + a_rx_r^2 = 2bx_1 \dots x_r + e$. До конца разобраны случаи $r = 3$ и 4. В случае $r = 3$, т. е. для уравнения $ax^2 + by^2 + cz^2 = 2dxyz + e$ при условии $abcd \neq 0$, число решений равно $q^2 + 1 + q\{\psi(a) + \psi(b) + \psi(c) + \psi(e)\}\psi(d^2e - abc)$, где $\psi(a) = 1$, если a — квадрат элемента поля, отличного от нуля; $\psi(a) = 0$, если $a = 0$; $\psi(a) = -1$ в остальных случаях. Для $r = 4$ результат более сложный. Он выражается различными формулами в разных случаях. *В. Д. Подсыпанин*

610. Обобщение функций $\varphi(n)$ и $\pi(x)$. Голубев (Zobecnění funkcí $\varphi(n)$ a $\pi(x)$. Goluběv V. A.), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 1, 47—48 (чеш.)

В первой части работы рассматривается числовая функция $\varphi_s(n)$, представляющая число пар натуральных чисел, взаимно простых с n, меньшее из которых не превосходит n, а разность их равна четному числу s. Утверждается, что $\varphi_s(n)$ — мультипликативная функция и вычисляется по формуле

$$\varphi_s(n) = n \prod_{p_1,\ p_2} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{2}{p_2}\right),$$

где p_1 — общие простые делители чисел n и s, p_2 — остальные простые делители n. Рассматривается также обобщение этой функции на случай комбинаций из m чисел.

Во второй части рассматривается функция, показывающая количество простых чисел близнецов, меньшее из которых не превосходит x. Для этой функции получена формула, аналогичная формуле Лежандра для функции $\pi(x)$.

В. Д. Подсыпанин

611. Теорема Льюнгрена и Якобсталя о числах Бернулли. Карлиц (A theorem of Ljunggren and Jacobsthal on Bernoulli numbers. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 34—37 (англ.)

Формулы Льюнгрена — Якобсталя (Ljunggren W., Avhandl. utg. Norske videnskab. akad. Oslo, I, Mat.-naturvidens Kl., 1947, № 5, 14 pp.; Jacobsthal E., Kgl. norske videnskab. selskabs forhandl., 1950, **22**, 107—112) для полиномов Бернулли первого порядка:

$$\sum_{r=1,\ (r,\ m)=1}^{m} (r + mB)^{2q} = mB_{2q} \prod_{p \setminus m} (1 - p^{2q-1}),$$

$$\sum_{r=1,\ (r,\ m)=1}^{[(m-1)/2]} (r + mB)^{2q} = \frac{1}{2} mB_{2q} \prod_{p \setminus m} (1 - p^{2q-1}) \quad (m > 2),$$

переносятся на полиномы Эйлера первого порядка:

$$\sum_{r=1,\ (r,\ m)=1}^{m} (-1)^r E_k(r/m) = m^{1-k} E_k(0) \prod_{p \setminus m} (1 - p^{k-1}) \quad (m \text{ нечетно}),$$

$$\sum_{r=1,\ (r,\ m)=1}^{(m-1)/2} (-1)^r E_{2k-1}(r/m) = \frac{1}{2} m^{1-2k} E_{2k-1}(0) \prod_{p \setminus m} (1 - p^{2k-1}) \quad (m \text{ нечетно}, > 2).$$

Аналогичные соотношения выводятся для полиномов Бернулли и Эйлера n-го порядка.

Все эти формулы оказываются простыми следствиями известных свойств полиномов Бернулли и Эйлера. *А. В. Малышев*

612. Заметка о круговом полиноме. Карлиц (Note on the cyclotomic polynomial. Carlitz L.). Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 106—108 (англ.)

Если в выражении

$$4\frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2(x) - (-1)^{(p-1)/2} pZ^2(x)$$

(p — простое целое рациональное число $\geqslant 3$, $Y(x)$ — полином степени $(p-1)/2$, $Z(x)$ — полином степени $< (p-1)/2$) произвести замену x на $1 + t$ и принять во внимание

$$\binom{p}{r} = \frac{p}{r}\binom{p-1}{r-1} \equiv (-1)^{r-1}\frac{p}{r} \pmod{p^2} \quad (1 \leqslant r \leqslant p-1),$$

то легко получить сравнение

$$4p\sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{r-1} r^{-1} t^{r-1} + 4t^{p-1} \equiv \left(p\sum_{r=0}^{m-1} c_r t^r + 2t^m\right)^2 - (-1)^{(p-1)/2} p\left(\sum_{r=0}^{m-1} b_r t^r\right)^2 \pmod{p^2},$$

где $m=(p-1)/2$, a_r, b_r, c_r — целые рациональные числа, $a_r=pc_r$.

Автор статьи решает задачу нахождения по модулю p коэффициентов a_r и b_r. В результате несложных вычислений им получено:

$$\frac{1}{p}a_r\equiv\frac{(-1)^{r-m}}{r+m+1}+(-1)^{(p-1)/2}b'_{r+m}\pmod p$$
$$(0\leqslant r\leqslant m-1),$$
$$b_r\equiv\frac{2r_\eta}{r!}\frac{B_r^{(r+1/2)}}{2r+1}\pmod p\quad(0\leqslant r\leqslant m),$$
$$\left(\sum b_r t^r\right)^2=\sum b'_r t^r,$$

$\eta\equiv-(-1)^{(p-1)/2}\pmod p$, $B_m^{(z)}$ — бернуллиево число порядка z, определяемое соотношением

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^z=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}B_m^{(z)}.$$

В формуле (2.2) на стр. 107 и в следствии из формулы (3.1) на стр. 108 имеются опечатки.

П. Н. Реморов

613. О малых элементах одного замечательного множества целых алгебраических чисел. Дюфренуа, Пизо (Sur les petits éléments d'un ensemble remarquable d'entiers algébriques. Dufresnoy Jacques, Pisot Charles), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 15, 1551—1553 (франц.)

Продолжается изучение тех целых алгебраических чисел $\theta>1$, для которых все сопряженные лежат внутри единичного круга (РЖМат, 1953, 53; 1954, 3956). Найдены все $\theta<\theta_0=(1+\sqrt{5})/2$, а также все $\theta>\theta_0$, достаточно близкие к θ_0.

З. И. Боревич

614. Квадрат, равный сумме 9, 11 или 13 квадратов. Сандем (A square as the sum of 9, 11 and 13 squares. Sandham H. F.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, ч. 1, № 113, 31—38 (англ.)

Пусть $r_n(m^2)$ означает число способов для представления квадрата в виде суммы n квадратов. Формулы для $n=3,5,7$ даны Гурвицем (Hurwitz, Mathematische Werke, Basel, 1933, Band II, 751, 5); Глешер (J. W. L Glaisher) и Рамануджан (S. Ramanujan) дали формулы для некоторых четных n. В статье доказываются формулы

$$r_9(m^2)=\sum_{r\text{ нечетное}}\left\{\frac{274}{17}\sigma_7\left(\frac{m}{r}\right)-\frac{512}{17}\sigma_7\left(\frac{m}{2r}\right)+\frac{32}{17}\Theta\left(\frac{m}{r}\right)\right\}r^3\mu(r),$$

$$r_{11}(m^2)=\sum_{r\text{ нечетное}}\left\{\frac{331}{31}\sigma_9\left(\frac{m}{r}\right)-\frac{10\,560}{31}\sigma_9\left(\frac{m}{2r}\right)+\frac{352}{31}g\left(\frac{2m}{r}\right)\right\}r^4\left(\frac{r}{4}\right)\mu(r),$$

$$r_{13}(m^2)=\sum_{r\text{ нечетное}}\left\{\frac{4030}{691}\sigma_{11}\left(\frac{m}{r}\right)+\frac{13\,936}{691}\tau\left(\frac{m}{r}\right)\right\}r^5\mu(r),$$

где $\sigma_a(x)$ означает сумму a-х степеней делителей числа x, $\mu(x)$ — функция Мёбиуса, три арифметические функции $\Theta(n)$, $g(n)$ и $\tau(n)$ определяются из равенств (при n целом)

$$q\prod_1^\infty(1-q^n)^8(1-q^{2n})^8=\sum_1^\infty\Theta(n)q^n,$$
$$q^2\prod_1^\infty(1-q^{2n})^{20}(1-q^{2n-1})^{-8}=\sum_1^\infty g(n)q^n,$$
$$q\prod_1^\infty(1-q^n)^{24}=\sum_1^\infty\tau(n)q^n.$$

В. А. Голубев

615. Об одном вопросе относительно равных сумм одинаковых степеней. Палама (Su di una questione relativa a somme uguali di potenze simili. Palamà Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, № 3, 286—293 (итал.)

Пусть $M(n, r)$ означает наименьшее значение p, при котором удовлетворяется равенство $a_1^s+a_2^s+\cdots+a_p^s=b_1^s+b_2^s+\cdots+b_p^s$ $(s=1, 2, 3, \ldots, n; n+2, n+4, \ldots, n+2r)$, при этом $a_i\neq b_j\neq 0$, $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)=1$.

Подбором соответствующих примеров автор определяет верхние границы наименьших значений p для $M(n, r)$ при $n=2, 3, 4$ и некоторых r. Для этого используется доказанная в статье теорема:

Если $a_1^s+\cdots+a_p^s=b_1^s+\cdots+b_p^s$ $(s=1, 2, \ldots, n; n+2, n+4, \ldots, n+2r)$, то при любом l $(a_1-l)^s+\cdots+(a_p-l)^s+(b_1+l)^s+\cdots+(b_p+l)^s=(b_1-l)^s+\cdots+(b_p-l)^s+(a_1+l)^s+\cdots+(a_p+l)^s$, $(s=1, 2, \ldots, n+1; n+3, \ldots, n+2r+1)$.

Однако примеры на стр. 292—293 для $M(3,5)$, $M(3,6)$ и $M(3,7)$ не соответствуют определению $M(n, r)$, так как числа слагаемых левой и правой частей, данных в примерах равенств, различны.

В. А. Голубев

616. Некоторые свойства чистых периодических дробей. Батти (Some properties of pure recurring decimals. Batty J. S.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 324, 90—95 (англ.)

Подробно излагаются свойства периодов чистых периодических дробей. Из доказанных неизвестных свойств интересны следующие:

1) Пусть $p_1/q=0,(a_1\cdots a_\lambda)$, где $(p_1, q)=1$, $(q, 10)=1$, $(q, 3)=1$. Тогда

$$\sum_{s=1}^{\lambda}a_s=9K,$$
$$\sum_{s=1}^{\lambda}p_s=qK,$$

где p_s — остатки от деления $10p_1$ на q, K — целое число.

2) Если $\lambda=mn$, $(q, 10^m-1)=1$, то для $r=1, 2, \ldots, m$ $\sum_{s=0}^{n-1} p_{r+sm}=k_r q$, $\sum_{s=0}^{n-1} a_{r+sm}=10k_r-k_{r+1}$, где k_r — целое и $1\leqslant k_r\leqslant n-1$, $k_{m+1}=k_1$.

3) Пусть M — наибольший собственный делитель четного λ, $M=\frac{1}{2}\lambda$; тогда

$$K=\frac{1}{2}\lambda,\quad p_r+p_{\frac{1}{2}\lambda+r}=q,\quad a_r+a_{\frac{1}{2}\lambda+r}=9.$$

В. А. Голубев

617. О числах с целым гармоническим средним. Гарсия (On numbers with integral harmonic mean. Garcia Mariano), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 89—96 (англ.)

Описывается метод составления таблицы натуральных чисел $\leqslant 10^7$ с целым гармоническим средним своих делителей. Гармоническое среднее $H(n)$ делителей натурального числа n определяется формулой

$$\frac{1}{H(n)}=\frac{1}{v(n)}\sum_{d|n}\frac{1}{d},$$

где d пробегает все делители числа n, $v(n)$ обозначает число делителей числа n (Ore O., Amer. Math. Monthly, 1948, 55, 615—619).

Легко видеть, что

$$H(n)=\frac{n\,v(n)}{\sigma(n)},$$

где $\sigma(n)$ — сумма всех делителей числа n. При составлении таблицы используются несколько доказываемых элементарно теорем. Одна из них утверждает, что всякое число, каноническое разложение которого на простые множители имеет вид $p_1^{\alpha}p_2$, с целым гармоническим средним своих делителей, есть число совершенное.

В заметке приводится таблица всех $\leqslant 10^7$ чисел с целым гармоническим средним своих делителей. Все известные до сих пор числа с целым гармоническим средним своих делителей — четные.

В. И. Нечаев

618. Пифагоровы числа. Харт (Pythagorean numbers. Hart Philip J.), Math. Teacher, 1954, **47**, № 1, 16—21 (англ.)

Подробно излагается история вопроса. Большая таблица пифагоровых чисел x, y, z, расположенных по величине a и b согласно формулам $x=a^2+2ab$, $y=2b^2+2ab$, $z=a^2+2b^2+2ab$, а также таблица целых чисел x, y, z, w, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2+z^2=w^2$. Новых теорем нет.

В. А. Голубев

619 К. Теория чисел. Кондо (整數論・近藤孝一, 296 стр. Изд-во Токайсёбо, (東海書房) Токио, 1953, 380 иен) (япон.)

Книга состоит из четырех глав. В главе 1 рассматриваются деление целых чисел, элементарные числовые функции, сравнения, индексы и квадратичные вычеты, включая закон взаимности. В главе 2 излагаются элементы геометрии чисел, включая теорему Минковского о выпуклом теле, непрерывные дроби и понятие о модулярной группе. Глава 3 содержит некоторые сведения по теории идеалов и целых алгебраических чисел. В последней главе рассматривается теория чисел в квадратичных полях. Доказательства подробные; имеются иллюстрации.

А. А. Конюшков

620 К. Простые числа. Шнирельман. Пер. с русс. (Liczby pierwsze. Schnirelman L., tłum. z ros., Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1953, 3.36 rb., 0.84 doll.), Biul. eksportowy, 1953, № 7, 14 (библ.)

См. также: 579 К, 634, 672

АЛГЕБРА

621. Об «Алгебраических беседах» Раффаэлля Каначчи. Прочисси (Sui «Ragionamenti d'algebra» di Raffaello Canacci. Procissi Angiolo), Atti Accad. Ligure, 1952, **9**, 55—76 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

622 К. Специальный курс элементарной алгебры. Новоселов С. И. (Для пед. ин-тов), Изд. 3-е, 560 стр., Советская наука, М., 1954, 11 р. 35 к.

623 К. Закономерности комбинаторной техники. Насвитис (Die Gesetzmässigkeiten kombinatorischer Technik. Nasvytis A., VIII+103 S., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953, 9.00 DM) (нем.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

624. Граница для определителя с преобладающей диагональю. Бреннер (Une borne pour un determinant avec diagonale majorante. Brenner J. L.), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 5, 555—556 (франц.)

Рассматривается $n\times n$ матрица A с комплексными элементами, для которых выполняются неравенства

$$|a_{kk}|>\sum_{j\neq k}|a_{kj}|;\quad k=1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

Указывается оценка

$$\left|A\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n\\1,2,\ldots,n\end{pmatrix}\right| \geqslant$$

$$\geqslant |a_{11}| \prod_{k=2}^{n} \left(|a_{kk}| - m_k + \left|\frac{a_{k1}}{a_{11}}\right| \sum_{j>k} a_{1j} + R_k \right), \quad (2)$$

где

$$m_k = \sum_{j<k} |a_{kj}|,$$

$$R_k = \sum_{p=2}^{k-1} \left\{ \frac{\left|A\begin{pmatrix}1,\ldots,p-1,k\\1,\ldots,p-1,p\end{pmatrix}\right|}{\left|A\begin{pmatrix}1,\ldots,p-1\\1,\ldots,p-1\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}1,\ldots,p\\1,\ldots,p\end{pmatrix}\right|} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{j>k} A\begin{pmatrix}1,\ldots,p-1,p\\1,\ldots,p-1,j\end{pmatrix} \right\}.$$

Доказательство неравенства (2) получено путем приведения матрицы A методом Гаусса к треугольной форме и применения индукции относительно порядка A.

Оценка (2) уточняет оценку Прайса:

$$\left|A\begin{pmatrix}1,\ldots,n\\1,\ldots,n\end{pmatrix}\right| \geqslant |a_{11}| \prod_{2}^{n} (|a_{kk}| - m_k)$$

(Price G. B., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 26—30).

Д. М. Котелянский

625. О теореме Фробениуса. А л м а н (On a theorem of Frobenius. U l l m a n J. L.), Michigan Math. J., 1952, **1**, № 2, 189—193 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Находится необходимое и достаточное условие для того, чтобы неотрицательная матрица $\| a_{ij} \|_1^n$ имела положительное собственное число. Это условие заключается в наличии цикла $a_{i_1 i_2}, a_{i_2 i_3}, \ldots, a_{i_r i_1}$ $(r \geqslant 2)$, составленного из элементов матрицы, отличных от нуля. Далее для интегральных уравнений

$$f(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y)\, dy = 0$$

с неотрицательным ядром доказывается необходимое и достаточное условие существования положительного собственного числа. Это условие заключается в наличии цикла таких точек $(t_1, t_2), (t_2, t_3), \ldots, (t_r, t_1)$ $(r \geqslant 2)$ рассматриваемой области пространства (x, y), в которых ядро $K(x, y)$ строго положительно.

Приведенные доказательства отличаются простотой. Примеры не рассматриваются. Имеется много опечаток.

Н. В. Азбелев

626. Заметка об операторах Капелли, ассоциированных с симметрической матрицей. У о л л е с (A note on the Capelli operators associated with a symmetric matrix. W a l l a c e A n d r e w H.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, ser. 2, **9**, 7—12 (англ.)

Дается новое доказательство двух ранее уже доказанных теорем.

1. Модификация теоремы Капелли (Capelli, Math. Ann., 1887, **29**, 331—338) в приложении к симметрическим матрицам (Turnbull, Proc. Edinburgh Math. Soc., 1948, ser. 2, **8**, 76—86). Пусть x_i — m-мерные векторы, координаты которых удовлетворяют условию $x_{ij} = x_{ji}$. Введем обозначения:

$$\bar{\frac{\partial}{\partial x_{ij}}} = \frac{1}{2}(1 + \delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial x_{ij}},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера,

$$\bar{D}_{hq} = \sum_{p=1}^{m} x_{ph} \bar{\frac{\partial}{\partial x_{pq}}},$$

$$(x_1 x_2 \ldots x_r)_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \begin{vmatrix} x_{1i_1} & \ldots & x_{1i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{ri_1} & \ldots & x_{ri_r} \end{vmatrix}.$$

Тогда имеет место равенство:

$$\left(x_1 x_2 \ldots x_r \middle| \bar{\frac{\partial}{\partial x_1}} \bar{\frac{\partial}{\partial x_2}} \cdots \bar{\frac{\partial}{\partial x_r}}\right) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i_1 \ldots i_r} (x_1 x_2 \ldots x_r)_{i_1 \ldots i_r} \left(\bar{\frac{\partial}{\partial x_1}} \bar{\frac{\partial}{\partial x_2}} \cdots \bar{\frac{\partial}{\partial x_r}}\right)_{i_1 \ldots i_r} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{D}_{11} + \dfrac{r-1}{2} & \bar{D}_{12} & \ldots & \bar{D}_{1r} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} + \dfrac{r-2}{2} & \ldots & \bar{D}_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{D}_{r1} & \bar{D}_{r2} & \ldots & \bar{D}_{rr} \end{vmatrix}.$$

2. Теорема Гардинга (Gårding, Proc. Edinburgh Math. Soc., 1948, ser. 2, **8**, 73—75). Пусть X — симметрическая матрица порядка m,

$$\left(\bar{\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}} \bar{\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}} \cdots \bar{\frac{\partial}{\partial x_{i_l}}}\right)_{j_1 \ldots j_l}$$

— дифференциальный оператор в виде определителя порядка $l (\leqslant m)$; Δ — минор, дополнительный к минору $(x_{i_1} \ldots x_{i_l})_{j_1 \ldots j_l}$ в разложении Лапласа определителя X; тогда имеет место равенство

$$\left(\bar{\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}} \bar{\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}} \cdots \bar{\frac{\partial}{\partial x_{i_l}}}\right)_{j_1 \ldots j_l} |X|^r =$$

$$= r(r + 1/2)(r + 1) \ldots (r + (l-1)/2) |X|^{r-1} \Delta.$$

Я. М. Каждан

ГРУППЫ

627. FC-цепи в группах. Х а й м о (The FC-chain of a group. H a i m o F r a n k l i n), Canad. J. Math., 1953, **5**, № 4, 498—511 (англ.).

Реферируемая работа продолжает исследования Бера (Baer Reinhold, Duke Math. J., 1948, **15**,

1021—1032) и Неймана (Neumann B. H., Proc. London Math. Soc., 1951, 1, 178—187) о группах с конечными классами сопряженных элементов (FC-группах). Как показал Бер, для произвольной группы G множество $H_1 = H_1(G)$ всех ее элементов, имеющих конечное число сопряженных, является характеристической подгруппой. FC-цепью группы G называется ряд ее характеристических подгрупп $\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots$, где $H_{n+1}/H_n = H_1(G/H_n)$. Эта цепь может быть продолжена трансфинитно. Если $H_n(G) = G$, но $H_{n-1}(G) \neq G$, то G называется FC-нильпотентной группой FC-класса n. Ясно, что $H_n(G) \supset Z_n(G)$, где $Z_n(G) = Z_n$ есть n-ый член верхней центральной цепи группы G. Если $Z_{i+1} \not\subset H_i$, то $Z_{i+1} \supset Z_{i+1} \cap H_i \supset \ldots \supset Z_{i+1} \cap H_1 \supset \{e\}$, где все включения являются строгими. Множество L_{i+1} $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ элементов x из H_{i+1}, для которых $x^n \in H_i$ при некотором натуральном n, является характеристической (в G) подгруппой, а H_{i+1}/L_{i+1} есть абелева группа без кручения. Частным случаем этого предложения является результат Неймана о периодичности коммутанта в FC-группах. Если K есть нормальный делитель конечного индекса в G и $H_n(G) \subset K$, то $H_n(K) = H_n(G)$. Для любого натурального n коммутаторное частное $H_n(G) \div H_{n+1}(G)$ (т. е. совокупность таких элементов x из G, что $[x, y] \in H_n(G)$ для любого y из $H_{n+1}(G)$) является пересечением некоторого множества подгрупп, имеющих конечный индекс в группе G.

Пусть U — некоторая группа автоморфизмов группы G, содержащая все внутренние автоморфизмы. Если $H_n(G) = Z_n^*(G) = H_{n+1}(G) = Z_{n+1}(G)$, а $\alpha \in H_i(U)$ для некоторого натурального i, то стационарная подгруппа автоморфизма, индуцируемого автоморфизмом α в факторгруппе $G/Z_n(G)$, имеет конечный индекс в $G/Z_n(G)$. Строится пример FC-нильпотентной группы G FC-класса 2, у которой $H_1(G) \neq Z_1(G)$, и доказываются некоторые простые свойства FC-нильпотентных групп.

В. М. Глушков

628. Составные расширения групп. I. Продолжения нормальных гомоморфизмов. Тейлор (Compound group extensions. I. Continuations of normal homomorphisms. Taylor Robert L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 1, 106—135 (англ.)

Пусть K и G — группы. Гомоморфизм $\varphi: K \to G$ называется нормальным, если $N = \varphi(K)$ есть нормальный делитель G. Продолжением нормального гомоморфизма φ называется такой гомоморфизм $\bar{\varphi}: E \to G$ группы E, содержащей K в качестве подгруппы, на G, что $\bar{\varphi}|_K = \varphi$, $\bar{\varphi}^{-1}(1) = \varphi^{-1}(1) = X$. Группа E является, следовательно, расширением X посредством G, причем это расширение продолжает заданное расширение K группы X посредством N. Два продолжения $\bar{\varphi}: E \to G$ и $\bar{\varphi}': E' \to G$ называются изоморфными, если существует изоморфизм $w: E' \approx E$ такой, что $w|_K = 1$, $\varphi w = \bar{\varphi}'$. Работа посвящена описанию классов изоморфных продолжений данного нормального гомоморфизма, что является обобщением задачи описания расширений одной группы посредством другой.

Пусть $A_X(K)$ есть группа тех автоморфизмов K, которые отображают X на себя; $A(N)$ — группа автоморфизмов N. Имеем следующие естественные гомоморфизмы:

$$\gamma: K \to A_X(K); \quad \lambda: A_X(K) \to A_X(K)/\gamma(X);$$
$$\gamma_0: G \to A(N); \quad \varphi_*: A_X(K)/\gamma(X) \to A(N).$$

Пусть гомоморфизм $\theta: G \to A_X(K)/\gamma(X)$ удовлетворяет условиям $\theta\varphi = \lambda\gamma$ и $\varphi_*\theta = \gamma_0$. Пару (φ, θ) автор называет псевдомодулем.

Если $\bar{\varphi}: E \to G$ есть продолжение $\varphi: K \to G$, то равенство $\theta\bar{\varphi} = \lambda\bar{\gamma}$ (при естественном гомоморфизме $\bar{\gamma}: E \to A_X(K)$) определяет θ так, что (φ, θ) есть псевдомодуль. В этом случае продолжение $\bar{\varphi}: E \to G$ называется расширением псевдомодуля (φ, θ). Описание продолжений сводится, таким образом, к описанию расширений данного псевдомодуля. Не для всякого φ существуют псевдомодули. Строится простой пример нормального гомоморфизма, не имеющего псевдомодулей (значит, не имеющего продолжений).

Если для нормального гомоморфизма $\varphi: K \to G$ имеем $X \subset Z_K$ (центр K), то понятие псевдомодуля (φ, θ) совпадает с понятием скрещенного модуля, введенным Уайтхедом (Whitehead J. H. C., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 453—496). В этом случае группа $Q = G/N$ естественным образом является группой операторов для X. Скрещенному модулю (φ, θ) однозначно соответствует элемент из $H^3(Q, X)$ — характеристический класс гомологий (φ, θ).

Теорема. Чтобы скрещенный модуль (φ, θ) был расширяем, необходимо и достаточно, чтобы его характеристический класс гомологий был нулевым; при выполнении последнего условия существует 1—1-соответствие между классами изоморфных расширений (φ, θ) и элементами $H^2(Q, X)$.

Для произвольного псевдомодуля (φ, θ) через Γ обозначим группу, состоящую из тех $(x, a) \in G \times A_X(K)$, для которых $\theta(x) = a \bmod \gamma(X)$. Отображение $\varphi'(y) = (\varphi(y), \gamma(y))$, $y \in K$, есть нормальный гомоморфизм K в Γ, ядро которого $X \cap Z_K$ лежит в центре K. Гомоморфизм $\pi: \Gamma \to A_X(K)$, $\pi(x, a) = a$, определяет скрещенный модуль (φ', π).

Теорема. Расширения псевдомодуля (φ, θ) находятся в естественном 1—1-соответствии с расширениями соответствующего ему скрещенного модуля (φ', π); в частности, псевдомодуль (φ, θ) расширяем тогда и только тогда, когда (φ', π) расширяем.

В частном случае $K = X$ $(N = 1)$ полученные теоремы превращаются в теоремы Эйленберга и Маклейна (Курош А. Г., Теория групп, М., 1953, § 51).

Если (φ, θ) — скрещенный модуль, а Y — подгруппа K такая, что $Y \cap Z_K = X$, $\theta(G) \subset A_Y(K)$, то $((\varphi, \theta), Y)$ называется модулярной парой. Если (φ, θ) — псевдомодуль, то ему соответствует модулярная пара $((\varphi', \pi), X)$. Показывается, что понятие псевдомодуля в силу указанного соответствия эквивалентно понятию модулярной пары.

З. И. Боревич

629. Составные расширения групп. II. Тейлор (Compound group extensions. II. Taylor Robert L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 2, 304—310 (англ.)

Рассматривается система групп и гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & R_0 & \xrightarrow{\rho_0} & R_1 & & R_3 & \xrightarrow{\rho_3} & \cdots \\ & & \downarrow\beta_0 & & \downarrow\beta_1 & & \downarrow\beta_3 & & \\ \cdots & \longrightarrow & S_0 & \longrightarrow & S_1 \longrightarrow S_2 & \longrightarrow & S_3 & \longrightarrow & \cdots, \\ & & \sigma_0 & & \sigma_1 \quad \sigma_2 & & \sigma_3 & & \end{array} \qquad (1)$$

в которой все горизонтальные последовательности точные и для гомоморфизмов каждого прямоугольника имеет место коммутативный закон. Пополнением системы (1) называется группа R_2 вместе с гомоморфизмами $\rho_1\colon R_1 \to R_2$, $\rho_2\colon R_2 \to R_3$, $\beta_2\colon R_2 \to S_2$ такими, что после вставления R_2 в пробел системы (1) верхняя последовательность будет точная и будет справедлив коммутативный закон в обоих новых прямоугольниках. Предполагается:

1) $\sigma_1\beta_1(R_1) = \sigma_1(S_1)$, 2) $\rho_0(R_0)$ — нормальный делитель R_1, 3) $\beta_3(\rho_3^{-1}(1)) \subset \sigma_2(S_2)$ (условия 2) и 3) необходимы для существования пополнений). Естественным образом определяется изоморфизм двух пополнений.

Показывается, что классы изоморфных пополнений системы (1) находятся в естественном 1—1-соответствии с классами изоморфных продолжений нормального гомоморфизма $\varphi\colon R_1/\rho_0(R_0) \to \Gamma$ (см. реф. 628), где Γ есть группа тех $(x, y) \in \rho_3^{-1}(1) \times S_2$, для которых $\beta_3 x = \sigma_2 y$, а φ определен равенством $\varphi(z\rho_0(R_0)) = (1, \sigma_1\beta_1 z) \in \Gamma$, $z \in R_1$. *З. И. Боревич*

630. Простое доказательство основной теоремы для конечных абелевых групп. Фукс (A simple proof of the basis theorem for finite abelian groups. Fuchs L.), Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1952, 25, 117—118 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Автор доказывает основную теорему для конечных абелевых групп, рассматривая в группе A минимальные системы образующих $S(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, удовлетворяющие условиям: 1) каждый элемент S имеет порядок, равный степени простого числа, и 2) никакой элемент S нельзя заменить элементом низшего порядка так, чтобы измененная система S' была системой образующих для A. Доказывается, что всякая периодическая абелева группа с неприводимой системой S образующих, удовлетворяющей 2), есть прямая сумма циклических групп. *F. Haimo*

Перевод из Math. Revs, 1 53, **14**, № 11, 1058.

631 К. Введение в теорию конечных групп. Ледерман (Introduction to the theory of finite groups. Ledermann Walter, VIII+160 pp., 2nd ed., Oliver and Boyd, Edinburgh and London, Interscience Publishers, Inc., New York, 1953, 1.55 doll.) (англ.)

Изменения во втором издании немногочисленны. Они в основном состоят в переработке параграфа об изоморфизме и в новом изложении главы об абелевых группах. Последняя написана в терминах сложения и содержит основную теорему для бесконечных абелевых групп с конечным числом образующих. *D. C. Murdoch*

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 10, 945.

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

632. О теории ветвления бесконечных алгебраических расширений. Кавада (On the ramification theory of infinite algebraic extensions. Kawada Yukiyosi), Ann. Math., 1953, 58, № 1, 24—47 (англ.)

Пусть k — p-адическое замыкание конечного расширения поля рациональных чисел. Если L/k — конечное нормальное расширение, то через V_i обозначается подгруппа группы Галуа L/k, состоящая из тех автоморфизмов σ, для которых $\sigma(\alpha) \equiv \alpha(\mathfrak{p}^i)$ для любого целого α (группа ветвления). Подполя, принадлежащие V_i, называются полями ветвления. Может случиться, что среди V_i есть равные. Через $v_0, \ldots, v_r$ обозначаются те индексы, для которых $V_{v_i+1} \neq V_{v_i}$, причем $v_0 = 0$, $v_{r+1} = \infty$. Согласно Хассе вводятся числа

$$u_i = v_0 + \frac{1}{m_1}(v_1 - v_0) + \frac{1}{m_2}(v_2 - v_1) + \ldots + \frac{1}{m_i}(v_i - v_{i-1}),$$

где m_i есть индекс V_{v_i} в группе инерции. Множество $\{u_0, \ldots, u_r\}$ обозначается через $U(L)$. Полагается $\mathfrak{U}(u) = V_0$ при $-1 \leqslant u \leqslant 0$, V_{v_ρ} — при $u_{\rho-1} \leqslant u \leqslant u_\rho$, 1 — при $u_r \leqslant u \leqslant \infty$. Через $U(u)$ обозначается подполе, принадлежащее $\mathfrak{U}(u)$.

Для бесконечного нормального алгебраического расширения K/k через Λ обозначается система его подполей L конечной степени над k. Подполе K называется полем ветвления, если его пересечение с любым $L \in \Lambda$ есть поле ветвления в L. Исследуется совокупность полей ветвления K/k. Для любого u через $U_K(u)$ обозначается объединение всех $U_L(u)$ для $L \in \Lambda$. $U_K(u)$ есть нормальное поле ветвления, причем $U(u_1) \subseteq U(u_2)$, если $u_1 \leqslant u_2$. Через $U(K)$ обозначается объединение всех $U(L)$ для $L \in \Lambda$. Множество пределов монотонных невозрастающих последовательностей чисел из $U(K)$ обозначается через $S(K)$. Каждое $U(u)$ равно некоторому $U(u')$, $u' \in S(K)$, причем если u_1 и $u_2 \in S(K)$, то из $U(u_1) = U(u_2)$ следует $u_1 = u_2$. Если u_i — монотонная строго убывающая последовательность с пределом u, то для $L \in \Lambda$ определяется $U_L^*(u)$ как пересечение всех $U_L(u_i)$, а $U_K^*(u)$ определяется как объединение всех $U_L^*(u_i)$ для $L \in \Lambda$. Через $S^*(K)$ обозначается совокупность пределов монотонных строго убывающих последовательностей чисел из $U(K)$.

$$U_K^*(u_1) \subseteq U_K^*(u_2),$$

если $u_1 < u_2$, всякое $U_K^*(u)$ равно некоторому $U_K^*(u')$ с $u' \in S^*(K)$ и если u_1 и $u_2 \in S^*(K)$, то из

$U_K^*(u_1) = U_K^*(u_2)$ следует $u_1 = u_2$. Доказывается, что $U_K(u) \neq U_K^*(u')$, если $u \in S(K)$, $u' \in S^*(K)$, и что любое поле ветвления совпадает с одним из этих полей.

Рассматриваются примеры полей $K_1 = A_k$, $K_2 = A_{K_1}$ и $K_3 = A_{K_2}$, где A_Ω есть максимальное абелево расширение поля Ω. Множество $U(K_1)$ состоит, как известно, из целых неотрицательных чисел. Доказывается, что $U(K_2)$ дискретно, а $U(K_3)$ всюду плотно на положительной полуоси.

Исследуется обобщение формулы Гильберта для степени, в которой простой дивизор делит дифференту, и теории ведущего дивизора Артина на бесконечные расширения. Пусть G — группа Галуа K/k с обычной топологией и $h(\tau)$ — непрерывная функция на G, постоянная на классах сопряженных элементов и на классах смежности по $\mathfrak{U}_K(\lambda)$ при некотором λ. Такими являются, например, характеры конечномерных представлений G. Показатель ведущего дивизора h определяется формулой

$$F(h, K) = \int_{-1}^{\infty} f(h^*, u)\, du, \qquad h^*(u) = h(1) - h(u),$$

где

$$f(h^*, u) = \int_{\mathfrak{U}_K(u)} h^*(\tau)\, d\mu_u(\tau),$$

а $d\mu_u(\tau)$ является нормированной мерой Хаара на группе $\mathfrak{U}_K(u)$. На определенный таким образом ведущий дивизор переносятся простейшие свойства, которыми он обладает в случае конечного расширения. *И. Р. Шафаревич*

633. Когомологии в ассоциативных алгебрах и спектральные последовательности. Ш и Г у н - с и н (Cohomology of associative algebras and spectral sequences. Shih Kung-sing. Abstract of a thesis, University of Illinois, Urbana, Ill., 1953, 7 pp.) (англ.)

Пусть $P = A \otimes_F B$ — тензорное (прямое) произведение алгебр с единицей A и B над полем F и пусть M — произвольный унитарный двусторонний P-модуль. Обозначим через $C^n = C^n(P, M)$ группу нормальных n-коцепей алгебры P над M. В этих группах обычным образом определен оператор когранницы. Группу $C = \sum_0^\infty C^r$ профильтруем, определив C_j^n как подгруппу группы C^n, состоящую из n-коцепей, обращающихся в нуль, когда $n-j+1$ их аргументов принадлежат алгебре A (естественным образом рассматриваемой как подалгебра алгебры P), и положив $C_j = \sum_n C_j^n$. Алгебра B определена как алгебра левых и правых операторов группы $C^n(A, M)$, а значит, и группы $H^n(A, M)$.

Основная теорема автора утверждает, что для спектральной последовательности $\{E_r\}$, порожденной фильтрацией (C_j):

$$E_1^{p,q} \approx C^p(B, H^q(A, M)),$$

(T)

$$E_2^{p,q} \approx H^p(B, H^q(A, M)).$$

В § 5 первой части диссертации автор показывает, как нужно изменить рассуждения, чтобы получить прямое доказательство теоремы Хохшильда и Серра (РЖМат, 1953, 600) о расширениях групп, аналогичной теореме (T). В § 6 автор доказывает теорему, высказанную Хохшильдом и уже доказанную Розе (Rose I. H., Amer. J. Math., 1952, 74, 531—546), а именно, что если $H^m(A) = 0$ для любого двустороннего A-модуля коэффициентов и $H^n(B) = 0$ для любого двустороннего B-модуля коэффициентов, то $H^{m+n-1}(P) = 0$ для любого двустороннего P-модуля коэффициентов. Однако предполагаемое равенство: $\dim P = \dim A + \dim B$ (обозначения Розе) остается недоказанным.

Во второй части диссертации рассматривается более общий случай, когда P — любая алгебра с единицей над F, а A — такая ее подалгебра с единицей, что P обладает свободным A-базисом. В группу C вводится вторая фильтрация (C_j^*), аналогичная фильтрации, введенной Хохшильдом и Серром во второй главе цитированной выше работы. При помощи этой фильтрации автору удается доказать, что если алгебра A сепарабельна, то группы когомологий алгебры P изоморфны ее группам когомологий по модулю A. Обе фильтрации группы связываются друг с другом по методу Хохшильда и Серра, что позволяет для случая $P = A \otimes_F B$ доказать, что формулы (T) имеют место и для новой фильтрации. *P. J. Hilton*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 1, 6.

634. Арифме́тика дина́м. Э л ь и о с и ф Н а т а н (Arithmetic of dynames. Eljoseph Natha n), Riveon lematematika, 1953, 6, 15—23 (иврит; резюме англ.)

Автор исследует теорию чисел «дина́м», т. е. системы элементов вида $a + b\varepsilon$, где a, b — вещественные числа и $\varepsilon^2 = 0$. $a + b\varepsilon$ называется целым числом первого рода, если число a целое; $a + b\varepsilon$ называется целым числом второго рода, если a и b целые.

Отображение $a + b\varepsilon \to a$ является гомоморфизмом; для каждого многочлена $f(x_1 + \varepsilon y_1, \ldots, x_n + \varepsilon y_n) = f(x + \varepsilon y)$ имеем

$$f(x + \varepsilon y) = f_1(x) + \varepsilon \left[\sum y_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + f_2(x) \right],$$

где «вещественные» и «мнимые» части коэффициентов f являются коэффициентами f_1 и соответственно εf_2. Поэтому для целых чисел первого рода диофантово уравнение $f(x + \varepsilon y) = 0$ имеет решение только тогда, когда уравнение $f_1(x) = 0$ имеет целое рациональное решение. Наоборот, если $f_1(x) = 0$ имеет целое рациональное решение, для которого не все $\partial f_1 / \partial x_i$ равны нулю, тогда $f(x + \varepsilon y) = 0$ решается в целых числах первого рода.

Для целых чисел первого рода доказывается единственность разложения на множители.

Для целых чисел второго рода положение является более сложным. Разложение на множители здесь не единственно, может не существовать наибольшего общего делителя. Автор определяет

простые числа и рассматривает условия, при которых существует наибольший общий делитель.

E. G. Straus

Перевод из Math. Revs, 1953, 14, № 9, 848.

635. **Безэлементное обоснование общей теории идеалов и модулей. Керстан** (Elementfreie Begründung der allgemeinen Ideal- und Modultheorie. Kerstan Johannes), Ber. Mathematiker-Tagung Berlin, 1953, 49—57 (нем.)

Указываются некоторые теоремы теории идеалов, которые и формулируются, и могут быть доказаны на языке структуры с умножением, составленной из идеалов кольца, т. е. не требуют привлечения элементов кольца.

В полной дедекиндовой структуре с умножением $\mathfrak{J}$ определяется понятие полуобратимого элемента, соответствующее понятию главного идеала, и понятие финитарного элемента, соответствующее понятию идеала с конечной базой. Если потребовать, чтобы в $\mathfrak{J}$ всякий элемент являлся суммой элементов, одновременно полуобратимых и финитарных, и чтобы произведение финитарных элементов было финитарно, то уже можно доказать теорему о примарности неприводимого идеала, теорему о максимальности простых ненулевых идеалов в кольце с единицей, удовлетворяющем ограниченному условию минимальности, и др.

Исходя из системы всех R^*-модулей некоторого R^*-операторного кольца R (где R^* также кольцо), автор вводит понятие структуры модулей — это структура $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая всем тем условиям, которые накладывались выше на $\mathfrak{J}$, а также требованию: для всякой такой системы элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $\bigcap_{j\neq i} a_j \not\leqslant a_i$, существует полуобратимый и финитарный элемент b, удовлетворяющий условиям $b \not\leqslant a_i$ для всех i, но $b \leqslant a_1 + \ldots + a_n$. Элементы из $\mathfrak{M}$ называются модулями; модуль r, удовлетворяющий условию $r^2 \leqslant r$, называется кольцом; если $ra \leqslant a$, где r — кольцо, то модуль a называется r-модулем, а если, кроме того, $a \leqslant r$, то — идеалом в r. Определяются также понятия кольца с единицей, кольца без делителей нуля и поля. Автор указывает ряд разделов теории идеалов, которые могут быть изложены на языке структур модулей.

А. Г. Курош

636. **Расширение произвольной булевой алгебры до импликативной булевой алгебры. Копленд, Харари** (The extension of an arbitrary Boolean algebra to an implicative Boolean algebra. Copeland Arthur H., Harary Frank), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 5, 751—758 (англ.)

Каждая булева алгебра B может быть расширена до импликативной булевой алгебры B^* (определение импликативной булевой алгебры см. РЖМат, 1955, 115). Изучается импликативная булева алгебра, элементами которой являются возрастающие последовательности положительных целых чисел.

Импликативная булева алгебра B, состоящая более чем из двух элементов, атомарна. Через $p(x)$ обозначается вероятностная функция, удовлетворяющая следующим аксиомам (Copeland A. H., Math. Z., 1950, 53, 285—290):

P7. Если $x \in B$, то $p(x)$ — действительное неотрицательное число;

P8. Если $x \cdot y$, то $p(x \cup y) = p(x) + p(y)$;

P9. $p(1) = 1$;

P10. $p(x \times y) = p(x)\, p(y)$.

Пусть B — импликативная булева алгебра, $p(x)$ — вероятностная функция и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$; тогда существуют такие независимые элементы $y_1, y_2, \ldots, y_n \in B$, что $p(y_i) = p(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

А. Х. Лившиц

637. **Обобщенная «булева» теория универсальных алгебр. Часть 1. Подпрямые суммы и теорема о нормальном представлении. Фостер** (Generalized «Boolean» theory of universal algebras. Part I. Subdirect sums and normal representation theorem. Foster Alfred L.), Math. Z., 1953, 58, № 3, 306—336 (англ.)

Пусть $\mathfrak{U} = (U, o, \ldots)$ будет универсальная алгебра, где U — множество ее элементов, а $o \ldots$ — операции, заданные во множестве U и называемые примитивными. U-функцией называется функция от n ($\geqslant 0$) аргументов с областью значений и областью определения U. Строгой $\mathfrak{U}$-функцией называется U-функция от n ($\geqslant 1$) неизвестных, записанная в виде аналитического выражения через примитивные операции. $\mathfrak{U}$-функцией называется U-функция, полученная из строгой $\mathfrak{U}$-функции заменой в ней некоторых неизвестных константами, т. е. элементами из U. Всякая константа $a \in U$ является, в частности, $\mathfrak{U}$-функцией. Алгебра $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$ называется функционально (соответственно функционально строго) полной, если она конечна и всякая U-функция выражается как $\mathfrak{U}$-функция (соответственно строгая $\mathfrak{U}$-функция). $\mathfrak{U}$-тождеством называется тождественное равенство двух $\mathfrak{U}$-функций. Алгебра $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$ называется бинарной, если некоторая ее примитивная операция $\times$ («умножение») бинарна и существуют элементы 0, 1 такие, что

$$0 \times \xi = \xi \times 0 = 0,\ 1 \times \xi = \xi \times 1 = \xi\ (\xi \in U).$$

Бинарная алгебра $\mathfrak{U} = (U, \times, {}^\vee, {}^\wedge, o, \ldots)$ называется f-алгеброй (или логикой), если ее примитивная операция $\times$ бинарна и относительно ее существуют 0 и 1, примитивные операции $^\vee$ и $^\wedge$ монарны и таковы, что

$0^\wedge = 1,\ 1^\wedge = 0,\ 0^\vee = 1,\ 1^\vee = 0,\ (\xi^\wedge)^\vee = (\xi^\vee)^\wedge = \xi$.

Символом $\times_\wedge$ обозначается операция $a \times_\wedge b = (a^\wedge \times b^\wedge)^\vee$.

Пусть $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$ — произвольная f-алгебра и J — некоторая булева алгебра с умножением $\times$ и дополнением *. Рассмотрим множество U векторов $\alpha = [\ldots, a_\mu, \ldots]$ с компонентами из J, зависящими от U, т. е. $a_\mu \in J$ и $\mu \in U$ такими, что

$$\begin{cases} a_\mu a_\nu = 0\ (\mu \neq \nu) \\ \times_* \\ \sum\limits_{\mu \in U} a_\mu = 1\ (\mu, \nu \in U). \end{cases}$$

Здесь умножение понимается в смысле булевой алгебры J, а операция $\times_*$ означает: $a \times_* b = (a^* b^*)^*$ $(a, b \in J)$; μ-я компонента вектора α

обозначается $[\alpha]_\mu$. В U можно определить операции $\times, o, \ldots$, т. е. примитивные операции из $\mathfrak{U}$. Полученную алгебру обозначим через $\mathbf{U} = (U, \times, o, \ldots)$. Доказывается, что подмножество U' векторов, все компоненты которых равны 0, кроме одной, равной 1, можно отождествить с U. Таким образом, $\mathbf{U}$ содержит подалгебру $\mathbf{U}' = (U' \times, o, \ldots)$, изоморфную алгебре $\mathfrak{U}$, и называется J-расширением алгебры $\mathfrak{U}$; $\mathfrak{U}$ называется ядром алгебры $\mathbf{U}$, а J называется оболочкой.

В работе подробно изучаются свойства алгебр $\mathfrak{U}$ с фиксированным ядром и переменной оболочкой. В алгебру $\mathfrak{U}$ вкладывается наряду с ядром $\mathfrak{U}$ и оболочка J. Основным результатом этого раздела является теорема о нормальном разложении: Пусть $\mathfrak{U}$ будет J-расширением f-алгебры $\mathbf{U}$, $\xi, \eta, \ldots \in \mathbf{U}$ с (идемпотентными) компонентами $[\xi]_\mu = x_\mu$ и т. д. Тогда каждая $\mathbf{U}$-функция $f(\xi, \eta, \ldots)$ выражается в виде:

$$f(\xi, \eta, \ldots) = \overset{\times}{\sum_{\mu, \nu, \ldots \in \mathfrak{U}}} f(\mu, \nu, \ldots) x_\mu y_\nu \ldots$$

(«нормальное разложение»).

Далее рассматривается прямая сумма $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \times \ldots$ f-алгебры $\mathfrak{U}$, повторенной $\mathfrak{N}$ раз. Пусть $\mathbf{U}$ будет подалгеброй в $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$, состоящей из векторов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mathfrak{N})$. Для $\mu \in \mathfrak{U}$ μ-й проекцией вектора α называется вектор $P_\mu(\alpha) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mathfrak{N})$, где

$$\beta_i = \begin{cases} 1 \text{ при } \alpha_i = \mu \\ 0 \text{ при } \alpha_i \neq \mu \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, \mathfrak{N}).$$

Подалгебра $\mathfrak{U}$ прямой суммы $\mathbf{U}^{(\mathfrak{N})}$ называется нормальной подпрямой суммой алгебры $\mathfrak{U}$, если $\mathfrak{U}$ — конечная f-алгебра и $\mathbf{U}$ содержит все векторы вида $(\mu, \mu, \ldots, \mu)$ («скаляры») и вместе со всяким α, лежащим в $\mathbf{U}$, $P_\mu(\alpha)$ при любом $\mu \in \mathfrak{U}$; или же, если $\mathfrak{U}$ — бесконечная f-алгебра и $\mathbf{U}$ — прямая сумма алгебр $\mathfrak{U}$, т. е. $\mathbf{U} = \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$. Изучаются нормальные подпрямые суммы $\mathbf{U} = (\mathbf{U})$ f-алгебры $\mathfrak{U}$ и их связь с J-расширениями $\mathbf{U} = [\mathbf{U}]$ f-алгебры $\mathfrak{U}$.

Основной результат этого раздела: Класс $[\mathbf{U}]$ всех J-расширений алгебры $\mathfrak{U}$ совпадает с классом $(\mathbf{U})$ всех нормальных подпрямых сумм алгебры $\mathfrak{U}$. Доказана теорема: необходимым и достаточным условием того, чтобы нормальная подпрямая сумма $\mathbf{U}$ f-алгебры $\mathfrak{U}$ была прямой суммой этой же алгебры, $\mathbf{U} = \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$, является полнота булевой оболочки алгебры $\mathfrak{U}$ (т. е. булева алгебра J — оболочка алгебры $\mathfrak{U}$, рассматриваемой как J-расширение f-алгебры $\mathfrak{U}$, — должна быть полной).

Далее рассматриваются некоторые частные виды операций и вопросов о функциональной полноте (строгой функциональной полноте) некоторых видов алгебр (группы с нулем, p-кольца, p^k-кольца, алгебры Поста и т. д.). Наконец рассматривается связь нормальных подпрямых сумм с вопросом о продолжаемости функционального тождества с подалгебры $\mathfrak{U}$ алгебры $\mathfrak{B}$ на всю алгебру. Доказана теорема: Пусть $\mathfrak{B} = (V, \times, o, \ldots) = \{\ldots, \xi, \ldots\}$ есть бинарная алгебра и $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$ — ее подалгебра такая, что 1) 0 и 1 алгебры $\mathfrak{B}$ лежат в $\mathfrak{U}$, 2) $\mathfrak{U}$ конечна и функционально полна, 3) каждое $\mathfrak{U}$-тождество продолжаемо до $\mathfrak{B}$-тождества; тогда $\mathfrak{U}$ есть f-алгебра и $\mathfrak{B}$ есть нормальная подпрямая сумма $\mathfrak{U}$. *Ю. И. Соркин*

638 Д. Некоторые вопросы теории ассоциативных систем. Халезов Е. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

См. также: 609, 612, 613, 647, 718, 721, 723, 835 К, 892, 926, 927, 937, 938, 941, 942, 969

ТОПОЛОГИЯ

639. Решение проблемы Урысона об универсальных метрических пространствах. Мрувка С., Бюл. Польской акад. наук. Отд. 3, 1953, **1**, № 6, 229—230

Метрическое пространство R называют однородным относительно некоторой системы его подмножеств, если для любых двух изометричных множеств A и B этой системы существует изометричное отображение пространства R в себя, переводящее A в B. Метрическое пространство R называют универсальным относительно некоторого класса метрических пространств, если любое пространство этого класса можно изометрично вложить в R. Автор показывает, что всякое метрическое пространство, универсальное относительно класса всех пространств мощности $< m$ и однородное относительно системы всех множеств мощности $< m$, содержит множество мощности m, в котором все попарные расстояния равны 1, а поэтому имеет вес $\geqslant m$. Отсюда вытекает, что известное универсальное пространство Урысона (Труды по топологии, Гостехиздат, М.—Л., 1951, 747—777) неоднородно относительно счетных множеств. *Ю. М. Смирнов*

640. О комбинаторном и непрерывно-топологическом определении индекса пересечения двух замкнутых кривых на поверхности. Вейль (Über die kombinatorische und kontinuumsmässige Definition der Überschneidungszahl zweier geschlossener Kurven auf einer Fläche. Weyl Herrmann), Z. angew. Math. und Phys., 1953, **4**, № 6, 471—492 (нем.)

Подробно исследуются определение и основные свойства индекса пересечения замкнутых кривых на поверхности при помощи комбинаторного метода (триангуляция поверхности), с одной стороны, и при помощи «непрерывно-топологического» — с другой. При втором методе, представляющем собою развитие приемов, примененных автором в его известной книге «Die Idee der Riemannschen Fläche» (Teubner, Leipzig, 1913), не пользуются триангуляциями, а вместо этого рассматривают покрытие

поверхности кусками, гомеоморфными кругу. Доказывается эквивалентность обоих методов.

П. С. Александров

641. **Расцвечивание карт. Дирак** (The colouring of maps. Dirac G. A.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 4, № 112, 476—480 (англ.)

Приведены некоторые оценки числа цветов, достаточного для расцвечивания любой карты, заданной на поверхности S с эйлеровой характеристикой χ. Вместо карт рассматриваются двойственные им одномерные комплексы (графы), а вместо задачи расцвечивания «стран» карты — задача расцвечивания вершин графа. Граф называется k-цветным, если наименьшее число цветов, достаточное для его расцвечивания, равно k. Далее, k-цветный граф называется критическим, если для расцвечивания каждого его собственного подграфа достаточно $k-1$ цветов. Автор доказывает, что если критический k-цветный граф, имеющий N вершин, вычерчен на поверхности S, то имеет место неравенство $(k-1)N \leqslant 6(N-\chi)$. Заметив, что $N \geqslant k$, отсюда легко получить известную хевудовскую оценку (РЖМат, 1954, 3643) числа цветов, достаточного для расцвечивания любой карты, заданной на поверхности S. Кроме того, из приведенного неравенства вытекает следующий результат: критический k-цветный граф, вычерченный на поверхности S, имеет при $k \geqslant 8$ не более $-6\chi/(k-7)$ вершин. Следует заметить, что автор пользуется при вычислениях числом $h = 3-\chi$, которое он называет связностью поверхности.

В. Г. Болтянский

642. **Теоремы о расслоенных пространствах. Гриффин** (Theorems on fibre spaces. Griffin John S., Jr), Duke Math. J., 1953, **20**, № 4, 621—628 (англ.)

Приведено несколько теорем о расслоенных пространствах в смысле Ху (Hu Szu-tsen, Proc. Amer. Math. Soc., 1950, **1**, 756—762), в частности, указана в некоторых случаях связь этих пространств с косыми произведениями. Тройка $\{X, B, \pi\}$, где π — непрерывное отображение топологического пространства X на топологическое пространство B, называется структурой расслоения, если существует такое открытое покрытие Ω пространства B и для каждого $U \in \Omega$ такое непрерывное отображение

$$\varphi_U : U \times \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(U),$$

что при $b \in U$, $x \in \pi^{-1}(U)$ выполнены соотношения $\pi\varphi_U(b, x) = b$ и $\varphi_U(\pi(x), x) = x$. Система $\{\Omega, \varphi_U\}$ называется разрезающей системой для $\{X, B, \pi\}$. Если все слои $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$, гомеоморфны между собой и, кроме того, существует такая разрешающая система $\{\Omega, \varphi_U\}$ для $\{X, B, \pi\}$, что при $a \in U$, $b \in U$, $x \in \pi^{-1}(b)$ имеем $\varphi_U(b, \varphi_U(a, x)) = x$, то расслоение $\{X, B, \pi\}$ эквивалентно произведению в смысле Эресмана—Фельдбау (см. Стинрод Н., Топология косых произведений, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953). Дальнейшие теоремы автора относятся к структурам расслоений с вполне несвязными слоями. Для таких расслоений доказаны существование и единственность накрывающего пути, а также первая и вторая теоремы о накрывающей гомотопии (см. цитированную книгу Стинрода). При этом никаких дополнительных ограничений (кроме того, что слои $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$, вполне несвязны) на топологические пространства не накладывается, что дает в этом случае более сильные результаты, чем те, которые известны для любых косых произведений. Далее доказано, что структура расслоения с вполне несвязными слоями и односвязным локально линейно связным базисным пространством всегда имеет секущую поверхность.

Структура с вполне несвязными слоями и связным локально линейно связным базисным пространством может рассматриваться как косое произведение; в частности, если слои дискретны, то мы получаем накрытие.

В формулировках леммы о накрытии, а также первой и второй теорем о накрывающей гомотопии четыре раза допущена одна и та же описка: пропущена буква π, которой должна начинаться каждая формула, встречающаяся в этих формулировках.

В. Г. Болтянский

643. **Отображения многообразий и понятие степени. Олум** (Mappings of manifolds and the notion of degree. Olum Paul), Ann. Math., 1953, **58**, № 3, 458—480 (англ.)

В работе обобщается принадлежащее Брауэру понятие степени отображения, а также доказываются некоторые теоремы о гомотопической классификации отображений одного многообразия в другое. Пусть M — многообразие размерности n, I — группа целых чисел. Каждому элементу α фундаментальной группы $\pi^1(M, x_0)$ поставим в соответствие число $\lambda(\alpha)$, равное $+1$ или -1 в зависимости от того, будут ли пути, принадлежащие классу α, сохраняющими ориентацию или обращающими ее. Соотношение $\alpha(k) = \lambda(\alpha) \cdot k$, $k \in I$, определяет $\pi^1(M, x_0)$ как группу операторов группы I. Получающуюся локальную систему автор обозначает через I^l. Группа ∇-гомологий $H^n(M, I^l)$ оказывается (независимо от ориентируемости многообразия M) свободной циклической.

Пусть f — отображение многообразия M в многообразие Q той же размерности n. Отображение f индуцирует гомоморфизм θ: $\pi^1(M, x_0) \to \pi^1(Q, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Этот гомоморфизм θ называется правильным в смысле ориентаций (в дальнейшем — правильным), если он переводит элементы, сохраняющие ориентацию, и элементы, обращающие ориентацию, в элементы, обладающие теми же свойствами. Если f индуцирует правильный гомоморфизм θ, то локальная система I^l в Q переходит при гомоморфизме θ^* снова в локальную систему I^l (в M); чем определяется гомоморфизм f^*: $H^n(Q, I^l) \to H^n(M, I^l)$. Если η и ξ — образующие элементы двух последних групп, то $f^*\eta = k \cdot \xi$, где k — однозначно определенное натуральное число. Это число $k = \deg f$ автор называет подкрученной степенью (twisted degree) отображения f. В случае ориентируемых многообразий подкрученная степень совпадает с обычной, а, будучи приведена по mod 2, подкрученная степень дает (во всех случаях) степень mod 2. Если индуцированный отображением f гомоморфизм фундаментальных групп не является правильным, то подкрученная степень также может быть определена, но совпадает в этом случае с обычной степенью mod 2.

Пусть теперь M и Q обладают тем свойством, что $\pi^r(M) = \pi^r(Q) = 0$ при $1 < r < n$. В этом случае

автор доказывает ряд теорем гомотопической классификации.

Рассмотрим лишь случай, когда многообразие M, а также универсальное накрывающее пространство $\overline{Q}$ многообразия Q компактны. Ограничимся также случаем отображений, индуцирующих правильные гомоморфизмы фундаментальных групп. Для таких отображений имеются следующие результаты. Отображения f_0 и f_1 тогда и только тогда гомотопны относительно точки x_0, когда они индуцируют один и тот же гомоморфизм фундаментальных групп и имеют одинаковую подкрученную степень. Отображения f_0 и f_1 тогда и только тогда свободно гомотопны, когда индуцированные ими гомоморфизмы сопряжены, т. е. получаются друг из друга трансформацией при помощи некоторого элемента $\omega \in \pi^1(Q, y_0)$, и $\deg f_0 = \lambda(\omega) \cdot \deg f_1$.

Для случая отображений, индуцирующих неправильные гомоморфизмы, результаты получаются менее полные и значительно более сложные.

В работе приведены также некоторые приложения полученных результатов, в частности, к случаю обобщенных линзовых пространств. В приложении дается дальнейшее обобщение понятия степени (так называемая группово-кольцевая степень). Это обобщение тесно связано с хопфовской абсолютной степенью (Hopf H., Math. Ann., 1929, **102**, 562—623).

Примечание референта. Понятию подкрученной степени можно дать простое геометрическое определение, из которого легко получается ряд ее свойств. Пусть G' — подгруппа группы $G = \pi^1(M, x_0)$, состоящая из всех элементов, не обращающих ориентации. Тогда G' есть подгруппа индекса 2 в G и ей соответствует двулистная накрывающая $\hat{M}$ многообразия M. Без труда доказывается, что $\hat{M}$ есть ориентируемое многообразие. Если $f: M \to Q$ индуцирует правильный гомоморфизм, то легко строится отображение $\hat{f}: \hat{M} \to \hat{Q}$, «накрывающее» f. Степень k этого отображения и есть подкрученная степень. Заметим, что аналогичные (и даже несколько более общие) результаты получены для частного случая проективных пространств Гордоном (Гордон И. И., Изв. АН СССР сер. матем., 1952, **16**, 113—146). Гордон пользовался аналогичными методами, в частности его «специальные гомологии» совпадают с гомологиями по локальной системе коэффициентов I^t. Ссылки на работу Гордона в реферируемой статье нет. *В. Г. Болтянский*

644. Топология пространств стандартных путей и гомотопическая теория. I. Тода (Toda Hirosi), Topology of standard path spaces and homotopy theory. I. Proc. Japan Acad., 1953, **29**, № 7, 299—304 (англ.)

Как указывает автор, этой заметкой начинается целая серия работ, посвященных выяснению гомологической структуры пространства путей и исследованию гомотопической структуры пространств. В этой заметке автор независимо от Серра вычисляет гомотопические группы $\pi^p(S^n)$ для $p \leqslant n + 8$.

Пусть $*$ — фиксированная точка пространства X. При помощи абстрактного стягивания в точку подмножества $* \times I \cup X \times \dot{I}$ произведения $X \times I$ можно превратить это произведение в пространство $E(X)$, называемое надстройкой над X. Стягивающее отображение обозначим через d. Отрезок $x \times I$, где $x \in X$, переходит при отображении d в замкнутую петлю, начинающуюся в $*$ и обозначаемую через $l(x)$. Пусть A — подмножество пространства X, содержащее точку $*$. Символом $l(x_1, \ldots, x_n; y, t)$ автор обозначает путь, который последовательно обходит петли $l(x_1), \ldots, l(x_n)$, а затем обходит часть петли $l(y)$, $y \in A$, от точки $*$ до точки $d(y, t)$. При этом путь $l(x_1, \ldots, x_n; y, t)$ снабжается вполне определенной параметризацией и называется стандартным путем в $E(X)$ (заметим, что формула, при помощи которой автор определяет стандартный путь, неточна, но легко может быть исправлена). Множество всех стандартных путей обозначается через $\omega(E(X), E(A))$. Множество всех путей пространства $E(X)$, исходящих из $*$ и кончающихся в точках множества $E(A)$, обозначается через $\Omega(E(X), E(A))$. Автор ошибочно утверждает, что $\omega(E(X), E(A))$ является замкнутым подмножеством пространства $\Omega(E(X), E(A))$, но ошибочность этого утверждения не влияет на справедливость дальнейших рассуждений. При $A = *$ обозначения $\Omega(E(X), E(A))$ и $\omega(E(X), E(A))$ сокращаются до $\Omega(E(X))$ и $\omega(E(X))$. Автор утверждает (теорема 1), что гомоморфизмы вложения группы $\pi^p(\omega(E(X)))$ в группу $\pi^p(\Omega(E(X)))$ и группы $\pi^p(\omega(E(X), E(A)))$ в группу $\pi^p(\Omega(E(X), E(A)))$ являются (при весьма общих предположениях о пространствах X и A) изоморфизмами на. Отсюда при помощи изоморфизма Гуревича вытекают следующие изоморфизмы:

$$\pi^p(\omega(E(X))) \approx \pi^{p+1}(E(X)),$$

$$\pi^p(\omega(E(X), E(A))) \approx \pi^{p+1}(E(X), E(A)), \qquad (1)$$

а также аналогичный гомоморфизм для гомотопических групп триад (о гомотопических группах триад. см. Blackers A. L., Massey W. S., Ann. Math., 1951, **53**, № 1, 161—205).

Для произвольного CW-комплекса K_0 автор строит последовательность комплексов ${}^0K, \ldots, {}^mK, \ldots$ первым из которых является комплекс ${}^0K = E(K_0)$, а каждый следующий получается из предыдущего присоединением нескольких клеток. Комплексам, ${}^mK$ соответствуют пространства $\omega({}^mK) \subset \Omega({}^mK)$, составленные из стандартных путей. Для CW-комплекса K, получающегося в результате объединения всех комплексов ${}^mK$, автор доказывает теорему 2, формулировка которой аналогична формулировке теоремы 1.

В качестве приложения автор формулирует некоторые утверждения о гомотопических группах сфер и дает сводку результатов о группах $\pi^p(S^n)$ для $p \leqslant n + 8$.

Примечание референта. Из того факта, что надстройка над n-мерной сферой является $(n+1)$-мерной сферой, вытекает (см. (1)) формула

$$\pi^{p+1}(S^{n+1}) \approx \pi^p(\omega(E(S^n))).$$

Эта формула позволяет при помощи чрезвычайно простых рассмотрений, связанных с пространством $\omega(E(S^n))$, вывести ряд теорем о гомотопических группах сфер. В частности, таким способом могут быть получены теоремы Фрейденталя о надстройке, результаты Хопфа об отображениях $S^n \to S^n$ и

$S^3 \to S^2$, результаты Понтрягина об отображениях $S^{n+1} \to S^n$ и $S^{n+2} \to S^n$. Получающиеся таким образом доказательства, повидимому, значительно проще всех других известных доказательств.

В. Г. Болтянский

645. Гомотопическая теория совпадений. Фуллер (The homotopy theory of coincidences. Fuller F. B.), Ann. Math., 1954, 59, № 9, 219—226 (англ.)

Пусть f и g — два отображения комплекса K в связное односвязное многообразие M. Всякая точка $x \in K$, для которой $f(x) = g(x)$, называется совпадением отображений f и g. В работе обсуждается вопрос о том, при каких условиях отображения f и g могут быть при помощи деформации освобождены от совпадений.

Обозначим через (f, g) отображение, определенное формулой $(f, g)x = (f(x), g(x))$, $x \in K$. Тогда (f, g) отображает K в произведение $M \times M$, и вопрос сводится к следующему: при каких условиях отображение (f, g) гомотопно отображению, переводящему K в $M \times M \setminus D$, где D — диагональ произведения $M \times M$. Для решения этого вопроса автор строит своеобразную теорию препятствий.

Пусть отображения f и g не имеют совпадений на $(r-1)$-мерном остове r-мерного комплекса K. Тогда отображение (f, g) переводит остов K^{r-1} в $M \times M \setminus D$, и для каждого r-мерного симплекса $T \in K$ определен некоторый элемент группы $\pi^r(M \times M, M \times M \setminus D)$. Получающаяся таким образом цепь $d^r(f, g)$ и есть препятствие.

Автор показывает прежде всего, что группа $\pi^r(M \times M, M \times M \setminus D)$ изоморфна группе $\pi^r(M, M \setminus p)$, где p — точка многообразия M. Изоморфизм порождается вложением

$$(M \times p, (M \setminus p) \times p) \subset (M \times M, M \times M \setminus D).$$

Так как группа $\pi^r(M, M \setminus p)$ тривиальна при $r < n$, где n — размерность многообразия M, то первое возможное нетривиальное препятствие возникает при $r = n$, т. е. при рассмотрении отображений n-мерного комплекса в n-мерное многообразие, $n \geqslant 3$. Всякие два отображения n-мерного комплекса в n-мерное многообразие могут быть деформацией освобождены от совпадений на $(n-1)$-мерном остове, после чего для них определится препятствие. Группой коэффициентов первого препятствия является свободная циклическая группа $\pi^n(M, M \setminus p)$. Класс гомологий первого препятствия является элементом группы $\nabla^n(K^n, \pi^n(M, M \setminus p))$ и однозначно определяется отображением (f, g).

Далее рассматриваются отображения $(n+1)$-мерного комплекса в n-мерное многообразие M, $n \geqslant 4$. Для двух отображений f, g, не имеющих совпадений на n-мерном остове, определен ∇-цикл $d^{n+1}(f, g)$, называемый вторым препятствием. Группой коэффициентов второго препятствия служит $\pi^{n+1}(M, M \setminus p)$, которую автор полностью вычисляет. Именно, эта группа изоморфна прямой сумме $\Delta^2(M) + Z_2$, где Z_2 — группа второго порядка. Вторые препятствия заполняют, вообще говоря, несколько классов гомологий группы $\nabla^{n+1}(K^{n+1}, \pi^{n+1}(M, M \setminus p))$. Автор дает вычисление этих классов гомологий, пользуясь функциональными операциями Sq_f^2 и $\cup_f$, введенными Стинродом (Steenrod N. E., Ann. Math., 1949, 50, № 4, 954—988).

В. Г. Болтянский

646. Замечание о фактор-пространствах. Джеймс (Note on factor spaces. James I. M.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 3, № 111, 278—285 (англ.)

Доказана следующая теорема. Пусть O_n — полная ортогональная группа порядка n, а $H = O_r \times L$ — подгруппа группы O_n, причем L есть прямое произведение некоторого числа ортогональных групп, порядки которых не превосходят r. Тогда при $i \geqslant 2$ имеет место изоморфизм $\pi_i(O_n/H) \approx \pi_i(V_{n,n-r}) + \pi_{i-1}(L)$, где $V_{n,n-r}$ — многообразие Штифеля. Эта теорема дает возможность вычислить гомотопические группы грассмановского многообразия $M_{n,r} = O_n/(O_{n-r} \times O_r)$ через гомотопические группы многообразий Штифеля.

Далее рассматриваются поля неориентированных касательных r-мерных плоскостей и поля r-реперов на n-мерной сфере S^n. Доказано, что при $n \geqslant 2r$ из существования поля касательных r-мерных плоскостей вытекает существование поля r-реперов (обратное очевидно). Если на S^n существует поле r-реперов, $n \geqslant 2r$, то для того чтобы всякое поле касательных r-мерных плоскостей порождалось некоторым полем r-реперов, необходимым и достаточным является условие $\pi_{n-1}(O_r) = 0$. В частности, автор указывает, что на S^7 существует поле касательных трехмерных плоскостей, не порождаемое никаким полем 3-реперов. Автор отмечает, что аналогичные результаты могут быть получены для других классических групп.

В. Г. Болтянский

647. Конференция по косым произведениям и дифференциальной геометрии в Итаке. Стинрод (The conference on fiber bundles and differential geometry in Ithaca. Steenrod N. E.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 6, 569—570 (англ.)

Отчет о конференции по косым произведениям и их применениям к теории групп Ли, теории дифференциально-геометрических и комплексно-аналитических пространств и алгебраической геометрии. Приведен список участников и названия докладов.

М. М. Постников

648 К. Элементы математики. Ч. I. Основы анализа. Кн. III. Общая топология (список результатов). Бурбаки (Eléments de methématique. XVI. Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III: Topologie générale (fascicule de résultats). Bourbaki N., Actualités Sci. Ind., № 1196, 95 pp., Hermann et Cie, Paris, 1953, 1500 fr.) (франц.)

Публикация «Общей топологии» (третьей книги курса Бурбаки) уже завершена. Цель автора при опубликовании этого «Списка результатов», раскрытая во введении, состоит в следующем:

«Данный список задуман, прежде всего, как справочник: для каждого фундаментального понятия топологии делалась попытка сгруппировать как только возможно сжато существенные результаты, где участвует это понятие и которые нужно пом-

нить при его применении. В частности, делалась попытка собрать критерии, позволяющие утверждать, что некоторое множество или функция обладают тем или другим свойством, например, бикомпактностью или непрерывностью. Этот способ изложения влечет за собой часть повторений: например, теорема, утверждающая, что образ бикомпактного множества при непрерывном отображении (в хаусдорфово пространство) бикомпактен, находится как в параграфе, посвященном непрерывным функциям, так и в параграфе, посвященном бикомпактным пространствам. С другой стороны, очень часто случается, что некоторое понятие упоминается в параграфе, предшествующем параграфу, в котором оно определяется: тогда предметный указатель, помещенный в конце этого списка, дает точное место в «списке», где дано определение... Теория действительных чисел предполагается известной читателю».

«В соответствии с характером этого списка в нем не содержится никаких доказательств формулируемых результатов; для наиболее трудных теорем указано место в третьей книге, где находится доказательство».

Подчеркнем, что эта книга объединяет все определения, терминологию и результаты третьей книги; доказательств, примеров или упражнений не дано.

W. S. Massey

Перевод из Math. Revs, 1953, 14, № 11, 1106.

См. также: 559 К, 602, 633, 650, 653, 667 К, 732, 825, 866, 868, 869, 870, 936

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

649. Некоторые оценки для вариаций множеств. Витушкин А. Г., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 3, 433—434

Для замкнутого множества F и открытого множества G евклидова n-мерного пространства E^n определяется вариация порядка ν $W_\nu(F, G)$ множества F в G ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$) и вариация $W(F, G) = \sum_{\nu=1}^{n-1} W_\nu(F, G)$ множества F в G. Формулируются без доказательств теоремы:

1. Пусть Q и Q_0 — n-мерные открытые кубы в E^n с общим центром, ребра которых параллельны осям координат и равны соответственно a и $a/2$. Пусть далее континуум F пересекается с границами обоих кубов и $q+1$-мерная мера Лебега всех проекций F на $q+1$-мерные координатные плоскости равна нулю. Тогда существует такое ν ($1 \leqslant \nu \leqslant q$), что

$$W_\nu(F, Q) \geqslant \left[\frac{a}{8(q+1)}\right]^\nu.$$

2. Пусть отображение f пространства E^q в пространство E^n задается покоординатно многочленами $y_i = P_i(x_1, \ldots, x_q)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) степени r по каждому из переменных x_j. Если $F = f(E^q)$, то для любого n-мерного куба $Q \subseteq E^n$ с ребрами, параллельными осям координат и равными a, при любом ν ($1 \leqslant \nu \leqslant n-1$) имеет место неравенство $W_\nu(F, Q) \leqslant a^\nu C_n^\nu (6r)^{3q}$.

Из полученных теорем выводятся следствия для вариации $W(F, Q)$. *Л. Д. Кудрявцев*

650. Размерность декартовых произведений множеств. Марстранд (The dimension of Cartesian product sets. Marstrand J. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, ч. 2, 198—202 (англ.)

Через $A(B)$ обозначается множество, лежащее на оси OX (OY), через $\Lambda^t E$ при $t > 0$ — t-мерная мера Хаусдорфа множества E, и через E_x — пересечение плоского множества E с прямой $x = \text{const}$.

Доказывается следующая теорема:

Пусть E—плоское множество и p —положительное число такое, что для каждого $x \in A$ имеем $\Lambda_t E_x > p$. Тогда для $s > 0$ $\Lambda^{s+t} E \geqslant kp\,\Lambda^s A$, где k есть абсолютная положительная постоянная.

Отмечаются два следствия.

1. Если $\Lambda^s A$ и $\Lambda^t B$ — положительные числа, то

$$\Lambda^{s+t}(A \times B) \geqslant k \Lambda^s A \cdot \Lambda^t B.$$

2. Для произвольных множеств A и B размерность множества $A \times B$ не меньше суммы размерностей множеств A и B.

При доказательстве автор пользуется s-мерной мерой $L^s E$ множества E, введенной Безиковичем и связанной с мерой $\Lambda^s E$ неравенствами $\Lambda^s E \leqslant L^s E \leqslant 2\Lambda^s E$ (Besicovitch A. S., Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1952, A55, 339—344; Indagationes math., 1952, 14, 339—344). *А. Д. Тайманов*

651. Условия окаймления и свойство Витали для систем множеств. Хаупт, Пок (Halobedingungen und Vitalische Eigenschaft von Somensystemen. Haupt Otto, Pauc Christian Y.), Arch. Math., 1953, 4, № 2, 107—114 (нем.)

Рассматривается некоторое булево σ-кольцо $\mathfrak{z}$, элементы которого суть подмножества некоторого множества, причем на элементах из $\mathfrak{z}$ определена σ-конечная мера μ. Некоторая система $\mathfrak{c}$ конечномерных множеств удовлетворяет, по определению, сильному условию окаймления (Halobedingung), если существует число $\beta(\mathfrak{c})$, $1 \leqslant \beta < \infty$, такое, что для каждого множества $C \in \mathfrak{c}$ и любой конечной системы множеств $C_k \in \mathfrak{c}$, удовлетворяющих условиям: $\mu(C_k) \leqslant \mu(C)$, пересечение $C \cap C_k$ не пусто (или соответственно не пусто с точностью до меры нуль), имеет место неравенство $\mu(\bigcup_k C_k) \leqslant \beta\mu(C)$. Если же для всякого числа α, $0 < \alpha < 1$, существует $\beta = \beta(\alpha)$, $1 \leqslant \beta < \infty$, такое, что для каждой конечной суммы F элементов из $\mathfrak{c}$ и для каждой конечной системы множеств $C_k \in \mathfrak{c}$, удовлетворяющих условиям $\mu(C_k) \leqslant \alpha^{-1}\mu(C_k \cap F)$, имеет место соотношение $\mu(\bigcup_k C_k) \leqslant \beta\mu(F)$, то система $\mathfrak{c}$ удовлетворяет слабому условию окаймления.

Доказываются достаточные условия для того, чтобы некоторая система множеств из $\mathfrak{z}$ удовлетворяла сильному или слабому свойству Витали (РЖМат, 1954, 2912), в частности берутся системы, удовлетворяющие соответственно сильному и слабому условию окаймления.

Полные формулировки теорем мы не приводим, ввиду их сложности. *Л. Д. Кудрявцев*

652. Абсолютно измеримые множества в евклидовом пространстве. Хадвигер (Absolut meßbare Punktmengen im euklidischen Raum. Hadwiger H., von), Comment. math. helv., 1954, 28, № 2, 119—148 (нем.)

Главной целью работы является построение для k-мерного евклидова пространства R^k теории, аналогичной построенной Тарским теории «абсолютной меры» на прямой (Tarski A., Fundam. math., 1938, 30, 218—234). Автор замечает, что при $k>2$ конструкцию Тарского нельзя перенести на k-мерный случай, если положить в основу группу всех движений пространства R^k. В основу своих построений он кладет группу трансляций. Полученная мера автоматически оказывается инвариантной относительно всех движений.

Множества A и B пространства R^k называются трансляционно равными, символически $A \cong B$, если существует трансляция, переводящая A в B. Формула $A \simeq B$ означает, что существуют такие разложения $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, что A_i, как и B_i, попарно не пересекаются и $A_i \cong B_i (i = 1, \ldots, n)$. Всякая система n множеств, трансляционно равных A, называется выкладкой множества A и обозначается через $n \cdot A$; сумма характеристических функций этих множеств обозначается через $[n \cdot A]$ (при этом $[0 \cdot A] = 0$). Вообще сумма характеристических функций любой системы множеств $A_1, \ldots, A_n$ обозначается через $[A_1, \ldots, A_n]$. Единичный куб в R^k обозначается через E. Положим для любого ограниченного множества $A \subset R^k$:

$$\overline{H}(A) = \inf \frac{p}{n}, \quad [n \cdot A] \leqslant [p \cdot E],$$

$$\underline{H}(A) = \sup \frac{p}{n}, \quad [p \cdot E] \leqslant [n \cdot A],$$

где точные грани берутся по всевозможным выкладкам множеств A и E, удовлетворяющим указанным условиям с $p \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Числа $\overline{H}(A)$ и $\underline{H}(A)$ называются соответственно верхним и нижним абсолютным объемом множества A. Если $\overline{H}(A) = \underline{H}(A)$, то множество A называется абсолютно измеримым, а число $H(A) = \overline{H}(A) = \underline{H}(A)$ — его абсолютным объемом. Совокупность $\mathfrak{H}$ всех абсолютно измеримых множеств и абсолютный объем H обладают, в частности, следующими свойствами: они инвариантны относительно трансляций и, более того, относительно всех движений; они аддитивны (если $A \in \mathfrak{H}$, $B \in \mathfrak{H}$ и $A \cap B = 0$, то $A \cup B \in \mathfrak{H}$ и $H(A+B) = H(A) + H(B)$), однако $\mathfrak{H}$ не является ни телом, ни даже кольцом множеств, а функция H не является вполне аддитивной; если сумма конечного числа попарно непересекающихся множеств, трансляционно равных A, принадлежит к $\mathfrak{H}$, то $A \in \mathfrak{H}$; если $A \subset B$, то $H(A) \leqslant H(B)$, и, более того, если $[A_1, \ldots, A_n] \leqslant [B_1, \ldots, B_n]$, то $H(A_1) + \ldots + H(A_n) \leqslant H(B_1) + \ldots + H(B_n)$; $E \in \mathfrak{H}$ и $H(E) = 1$. Если множество A измеримо по Жордану, то $A \in \mathfrak{H}$ и $H(A)$ совпадает с мерой Жордана; однако абсолютно измеримое множество может быть неизмеримо даже по Лебегу.

Описанная конструкция абсолютного объема по своей идее отличается от конструкции Тарского. Наряду с ней автор излагает и точный аналог конструкции Тарского. Он предлагает и еще одну конструкцию абсолютного объема, основанную на идее неймановского среднего почти периодической функции на группе. Во всех трех конструкциях используются только трансляции. Оказывается, что все три определения эквивалентны между собой.

Абсолютные объемы, а также другие меры исследуются в работе и с аксиоматической точки зрения. Из общих теорем автора следует, в частности, что если множества A и B измеримы по Лебегу и $A \simeq B$, то $\operatorname{mes} A = \operatorname{mes} B$ (для случая $k = 1$ этот факт был установлен Тарским с использованием меры Банаха и, следовательно, аксиомы выбора). *В. А. Рохлин*

653. О применении теоремы о антиподах к теории меры. Борсук К., Бюл. Польской акад. наук. Отд. 3, 1953, 1, № 3—4, 83—86

Рассматривается метрическое пространство M, в котором задана мера μ, представленное в виде суммы $k+1$ измеримых множеств $M_i (i = 0, 1, \ldots, k)$. Изучается непрерывное отображение f n-мерного шара Q^n в M. Для точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащей границе S шара Q^n, через x^* обозначается ее антипод $x^* = (-x_1, \ldots, -x_n)$. Каждой точке $y \in f(Q^n)$ ставится в соответствие некоторое измеримое множество $A_y \supseteq M$, удовлетворяющее определенным условиям. Исследуется при помощи теоремы автора об антиподах (Fundam. math., 1933, 20, 177—190) связь между $\mu(A_{f(x)} \cap M_0)$, $\mu(A_{f(x)} \cap M_1), \ldots, \mu(A_{f(x)} \cap M_k)$ и $\mu(A_{f(x^*)} \cap M_0)$, $\mu(A_{f(x^*)} \cap M_1), \ldots, \mu(A_{f(x^*)} \cap M_k)$ для случая $k \leqslant n$. Показывается, что из полученного результата следует теорема Куратовского и Штейнхауса (РЖМат, 1954, 5079). *Л. Д. Кудрявцев*

654. О степени равномерности распределения точечного множества по отрезку. Грошев А. В., Тр. Уральск. политехн. ин-та, 1954, № 51, 82—85

В качестве характеристики неравномерности распределения измеримого множества E по отрезку $[0, l]$ $(E \subset [0, l],\ 0 < mE = m < l)$ предлагается число

$$k = \frac{2}{m(l-m)} \int_0^l \left| \varphi(x) - \frac{m}{l} x \right| dx,$$

где $\varphi(x) = m\{E \cap [0, x]\}$. *И. П. Натансон*

655. Обобщенная асимптотическая плотность. Бак (Generalized asymptotic density. Buck R. Creighton), Amer. J. Math., 1953, 75, № 2, 335—346 (англ.)

Пусть X — множество, $\{K_n\}$ — возрастающая последовательность его подмножеств, причем

$\bigcup K_n = X$. Множество $S \subset X$ называется ограниченным, если $S \subseteq K_n$ для некоторого n. На X задается последовательность мер $\{\mu_n\}$ со следующими свойствами: 1) $\mu_n(X) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, 2) $\mu_n(K_i) \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$, 3) существует $\{i_n\}$ такая, что $\mu_n(S) = 0$ для всякого измеримого S с $S \cap K_{i_n} = 0$.

Пусть множество S измеримо относительно всех μ_n. Тогда $\underline{\lim}\ \mu_n(S)$ и $\overline{\lim}\ \mu_n(S)$ называются нижней и верхней плотностями множества S и обозначаются $\underline{D}(S)$ и $\overline{D}(S)$. Если $\underline{D}(S) = \overline{D}(S)$, то их общее значение называется плотностью множества S и обозначается $D(S)$.

Вводится модифицированное понятие включения множеств: $A \dot{\subset} B$, если разность $A \setminus B$ ограничена. Имеет место следующая теорема, несправедливая при обычном понятии включения множеств: Пусть $A_1 \dot{\subset} A_2 \dot{\subset} \ldots$, $\lim \overline{D}(A_n) = \Delta$ и $\lim \underline{D}(A_n) = \delta$. Тогда существует множество A такое, что $\overline{D}(A) = \Delta$, $\underline{D}(A) = \delta$ и $A_n \dot{\subset} A$ для всех n.

Функция $f(x)$ на X сходится по плотности к числу L, если существует множество A плотности нуль, при котором для любого $\varepsilon > 0$ существует n такое, что $|f(x) - L| < \varepsilon$ для всех $x \in X \setminus (A \bigcup K_n)$.

По определению, $(\mu)\text{-}\lim f(x) = L$, если $\int f d\mu_n \to L$ при $n \to \infty$. Из предложений, устанавливающих связь между сходимостью по плотности и (μ)-суммируемостью, отметим следующее:

Пусть для функции f, ограниченной на ограниченных множествах, $\lim f(x) = L$ конечен и $(\mu)\text{-}\lim f(x) = L$. Тогда $f(x)$ сходится к L по плотности.

Указаны применения общих теорем о плотности к теории рядов. Пусть $X = \{1, 2, \ldots\}$, $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $\mu_n(S) = \nu(S \cap K_n)/n$, где ν означает число элементов множества. Тогда верны, например, следующие теоремы:

1. Пусть $\lim S_n = L$ конечен и $(C, 1)\text{-}\lim S_n = L$. Тогда $\{S_n\}$ сходится к L по плотности (т. е. почти для всех n в смысле плотности).

2. Пусть для $\sum a_n z^n$ радиус сходимости равен 1 и $\sum |a_n|^2 < \infty$. Если $\sum a_n z^n \to L$ при $z \to 1$, то $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k \to L$ для почти всех n. *А. А. Конюшков*

656. Одно общее свойство переменной совокупности. **Бонферрони** (Alcune proprietà generali di un insieme variabile. Bonferroni Carlo), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 1, 5—15 (итал.)

Обобщаются на случай многозначных функций результаты предыдущей работы автора (РЖМат, 1954, 5094). Пусть $y = f(x)$, где x — точка многомерного пространства, а y — множество, лежащее в другом многомерном пространстве. Точка l называется интерлимитом $f(x)$ при $x \to x_0$, если существует такая последовательность $x_n \to x_0$, что расстояние множества $f(x_n)$ до l стремится к нулю при $n \to \infty$. Если $f(x_0)$ является интерлимитом $f(x)$ при $x \to x_0$, то функция $f(x)$ называется интернепрерывной в x_0. Любая многозначная функция интернепрерывна всюду, исключая разве лишь счетное множество точек. Вводится понятие стабильного интерлимита $f(x)$ при $x \to x_0$. Под этим понимается обычный предел какой-либо из однозначных ветвей $f(x)$. Рассматривается вопрос о равномерности стремления $f(x)$ к множеству своих стабильных интерлимитов. Даны некоторые приложения к обычному понятию равномерного стремления к пределу. *И. П. Натансон*

657. Представление функций ограниченной вариации обобщенным интегралом. Очан Ю. С., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2(60), 209—211

Обобщенный интеграл $\oint_E \varphi(x)\,dx$ измеримой на E функции $\varphi(x)$ определяется равенством

$$\oint_E \varphi(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{f(t)} \int_E [\varphi(x)]_{-at}^{bt}\,dx,$$

где $f(t)$ — интегрирующая функция, непрерывная, монотонно не убывающая с $\lim_{t\to\infty} f(at)/f(t) = 1$ при любом $a > 0$.

Пусть E — отрезок $[a, b]$. $\varphi(x)$ называется всюду вполне интегрируемой на $[a, b]$ функцией, если она представима в виде разности неотрицательных обобщенно интегрируемых на каждом отрезке $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$ функций.

При надлежащем выборе интегрирующей функции $f(t)$ имеет место теорема:

Если $u(x)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, то существует всюду вполне интегрируемая на $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ такая, что

$$\oint_a^x \varphi(x)\,dx = u(x) - u(a).$$

Устанавливается также связь между обобщенным интегралом и интегралом Стилтьеса. *А. Я. Дубовицкий*

658. Заметка по теории интегрируемых функций. **Жерме** (Une remarque sur la théorie des fonctions intégrables. Germay R. H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1954, **23**, № 1, 6—12 (франц.)

Пусть $f(x)$ — ограниченная, а $\varphi(x)$ — непрерывная и возрастающая функции на $[a, b]$. Для некоторого разбиения D этого сегмента

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

вводятся обозначения: M_i и m_i — верхняя и нижняя грани $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$, $S_\varphi = \Sigma_i M_i [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$, $s_\varphi = \Sigma_i m_i [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$.

Пусть $I_\varphi = \inf S_\varphi$, $I'_\varphi = \sup s_\varphi$, где нижняя и верхняя грани берутся по всевозможным способам разбиения сегмента; тогда имеют место следующие равенства при $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$:

$$\lim \prod_i \{1 \pm M_i [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]\} = e^{\pm I_\varphi},$$

$$\lim \prod_i \{1 \pm m_i [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]\} = e^{\pm I'_\varphi}.$$

Знаки $\pm$ в правой и левой частях этих равенств соответствуют друг другу.

В частном случае, когда $f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, имеет место равенство при $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$:

$$\lim \prod_i \{1 \pm f(\xi_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]\} = \exp\left(\pm \int_a^b f d\varphi\right),$$

где ξ_i — произвольное число в $[x_{i-1}, x_i]$.

Это равенство распространяется на случай, когда $\varphi(x)$ является непрерывной функцией ограниченной вариации, а также на случай, когда $f(x)$ представляет собой сумму равномерно сходящегося ряда. *Ю. С. Очан*

659. О замене переменного под знаком интеграла. Ака (積分の變數變換について.赤攝也), 數學 (Сугаку), 1953, 5, № 1, 38—42 (япон.)

При довольно общих предположениях доказывается формула замены переменного в n-мерном интеграле

$$\int g(y)\, df(G) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} m \int g[f(x)]\, I(x)\, dG_m.$$

Здесь f — почти всюду на G дифференцируемое отображение n-мерной ограниченной замкнутой области G в n-мерное пространство, причем на f налагаются некоторые дополнительные ограничения, оставшиеся референту неясными; $I(x)$ — якобиан отображения f, G_m — множество точек области G, для которых степень отображения f в точке $f(x)$, $x \in G_m$, равна m.

Примечание референта. Близкие результаты к исследованию автора были получены в случае n-мерной области и отображения с ограниченной вариацией Радо и Рейхельдерфером (Rado T., Reichelderfer P. V., Proc. Nat. Acad. Sci U. S. A., 1949, 35, 678—680), а в случае произвольного измеримого множества при отсутствии ограничений на вариацию отображений — референтом (РЖМат, 1953, 532; 1955, 151). *Л. Д. Кудрявцев*

660. Об исправлении контуров поверхности Фреше. Фуллертон (On the rectification of contours of a Fréchet surface. Fullerton R. E.), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, 4, № 3, 207—212 (англ.)

Изучаются поверхности Фреше и свойства линий уровня действительных функций, определенных на этих поверхностях, в зависимости от различных допустимых представлений рассматриваемых поверхностей.

Пусть S — поверхность Фреше в евклидовом пространстве E^3 с представлением $w = F(x) \in E^3$, $x \in Q$, где Q — единичный замкнутый квадрат на плоскости, и пусть $[S]$ — множество точек поверхности S. Рассматривается действительная функция f, определенная и удовлетворяющая на $[S]$ условию Липшица. Положим

$$t' = \min_{w \in [S]} f(w),\quad t'' = \max_{w \in [S]} f(w),\quad \beta_F^{(t)} = E\{f[F(x)] < t\} \text{ и}$$
$$\xi_F^{(t)} = \beta_F^{(t)} - \beta_F^{(t)}.$$

Доказывается, что для всякой последовательности чисел $t_n \in (t', t'')$ такой, что обобщенные длины $l(t_n)$ нижних краев $F(\xi_F^{(t_n)})$ линий уровня $[f = t_n]$ конечны для всех $n = 1, 2, \ldots$ при некотором представлении F поверхности S, и любого $\varepsilon > 0$ существует представление $w = F_\varepsilon(x)$, $x \in Q$, эквивалентное данному представлению F в смысле Фреше, такое, что $\rho(F(x), F_\varepsilon(x)) < \varepsilon$, $x \in Q$, и каждая компонента компактов $\xi_{F_\varepsilon}^{(t_n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, есть либо простая дуга, либо простая замкнутая линия, либо континуум постоянства для представления F_ε на Q. *Л. Д. Кудрявцев*

661. О линиях уровня выпуклой поверхности. Массера, Шеффер (Sobre las curvas de nivel de una superficie convexa. Massera J. L., Schäffer J. J.), Bol. Fac. ingr. Montevideo, 1953, 4, № 5, 665—668; Publs Inst. mat. y estadist. Fac. ingr., 1953, 2, № 5, 117—120 (исп.)

Семейство C_t замкнутых кривых на плоскости, непрерывно зависящих от параметра t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, называется монотонным, если при $t'' > t'$ кривая $C_{t''}$ расположена внутри кривой $C_{t'}$, а C_1 вырождается в точку или отрезок.

Ищутся условия, при которых данное монотонное семейство выпуклых кривых есть семейство линий уровня некоторой выпуклой поверхности.

Эта задача сводится к следующей.

(F). На интервале (0, 1) дано семейство F непрерывных возрастающих функций $f(t)$. При каких условиях возможна замена переменного $t = T(s)$ такая, что все функции $f(T(s))$ будут выпуклыми?

(Семейство функций F получается из семейства кривых C_t следующим образом. На C_1 фиксируется точка O. Каждому лучу, исходящему из O, ставится в соответствие функция — $f(t)$, равная расстоянию от O до опорной прямой к C_t, перпендикулярной этому лучу).

Доказывается теорема: Для того чтобы задача (F) имела положительное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

а) Если сделать такую замену переменного, чтобы одна из функций, содержащихся в F, стала линейной, то все остальные функции из F станут абсолютно непрерывными.

б) Пусть $(a, b) \subset (0, 1)$, $D = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ — разбиение интервала (a, b), φ — функция, заданная на (a, b), и

$$\Delta_i^- \varphi = \begin{cases} \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) & \text{при } \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) < 0 \\ 0 & \text{при } \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) \geqslant 0. \end{cases}$$

Положим $V^-(L;\ a,\ b) = \sup_D \sum_i \sup_{f \in F} |\Delta_i^- \log f'(t)|$.

Тогда $V^-(L;\ t',\ t'') < \infty$ для всех $0 < t' < t'' < 1$.

в) $\int_0^1 \exp[-V^-(L;\ \tau,\ t)]\, dt < \infty$, где τ, $0 < \tau < 1$ — некоторое фиксированное число.

Искомая замена переменного может быть получена так: $s = T^{-1}(t) = K \int_0^t \exp[-V^-(L;\ \tau,\ t)]\, dt$ (K — нормирующий множитель). *Е. М. Ландис*

662. Понятие обильности векторного поля и интегральная теорема Гаусса. Ринов (Der Begriff der Ergiebigkeit eines Vektorfeldes und der Gausssche Integralsatz. Rinow Willi), Ber. Math.-Tagung, Berlin, 1953, 284—289 (нем.)

Пусть в n-мерном пространстве E^n задано векторное поле $\mathfrak{v}$ и пусть G — некоторая область в E^n и $\mathfrak{n}$ — внешняя нормаль к границе S области G. Обильностью векторного поля на области G (при соответствующих ограничениях на S) называется интеграл $\int_S \mathfrak{v}\mathfrak{n}\,ds$. Обобщая это понятие, автор строит некоторую вполне аддитивную функцию множеств $\eta(A;\ \mathfrak{v})$, определенную на некотором булевом σ-кольце подмножеств A данного открытого множества $G \subset E^n$, на котором задано векторное поле $\mathfrak{v}$. Эта функция $\eta(A;\ \mathfrak{v})$ и называется обильностью векторного поля $\mathfrak{v}$ на множестве A в широком смысле. Исходным пунктом конструкции является первоначально данное определение обильности, примененное к n-мерным промежуткам пространства E^n и далее распространяемое на более широкий класс множеств обычным образом так, что в результате получается вполне аддитивная функция множеств. Пусть $\eta = \eta^{(n)} + \zeta$, где $\eta^{(n)}$ — абсолютно непрерывная часть, а ζ — сингулярная часть функции обильности η, и пусть согласно теореме Радона — Никодима $\eta^{(n)}(A;\ \mathfrak{v}) = \int f dA$ (интеграл берется в смысле n-мерной меры Лебега). Функция f, определяемая этим равенством с точностью до меры нуль, называется дивергенцией $D[\mathfrak{v}]$ векторного поля $\mathfrak{v}$. Исходя из некоторой k-мерной меры ($k = 0, 1, 2, \ldots n-1$), аналогичным образом можно прийти к функции обильности, определенной на некоторой системе подмножеств данного множества F, ее вполне непрерывной части $\eta^{(k)}(A;\ \mathfrak{v})$ и дивергенции $D_F(\mathfrak{v})$. Пусть далее A — замкнутое множество и поле $\mathfrak{v}$ равно нулю вне A. Приводятся следующие обобщения теоремы Гаусса — Остроградского: в общем случае

$$\eta^{(n)}(A;\ \mathfrak{v}) = \int D[\mathfrak{v}]\,dA = -\sum_{k=0}^{n-1} \eta^{(k)}(A;\ \mathfrak{v}) - \zeta(A;\ \mathfrak{v}),$$

а для случая, когда A есть замкнутая область: $A = G + F$, где F — граница области G, причем функция обильности η абсолютно непрерывна на G и F соответственно в смысле n-мерной и $(n-1)$-мерной меры Лебега, дается формула

$$\int D[\mathfrak{v}]\,dG = -\int D_F[\mathfrak{v}]\,dF.$$

Полные доказательства отсутствуют. *Л. Д. Кудрявцев*

663. О классах $H_\Phi^{(r_1,\ldots,\ r_n)}$. Калугина Е. П., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 1, 13—15

Некоторые результаты С. М. Никольского о классах $H_{p\,*}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 38, 244—278, теоремы 7, 10, 12, 13), относящиеся к случаю $\Phi(u) = |u|^p$ ($p \geqslant 1$), распространены на классы $H_\Phi^{(r_1,\ldots,r_n)}$ 2π-периодических по каждому из переменных функций, где $\Phi(u)$ — выпуклая функция с некоторыми свойствами. Определение $H_\Phi^{(r_1,\ldots,r_n)}$ аналогично определению $H_{p\,*}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ с заменой выражения $\left[\int |\varphi|^p\,dv\right]^{1/p}$ на $\Phi^{-1}\left[\int \Phi(c\,|\,\varphi\,|)\,dv\right]$, где Φ^{-1} — функция, обратная к Φ, и c — любое положительное число.

Формулируются три теоремы.

Первая теорема, распространяя теоремы 7 и 10 цитированной работы, дает необходимое и достаточное условие принадлежности функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ к классу $H_\Phi^{(r_1,\ldots,r_n)}$:

$$A_{\nu_1 \ldots \nu}\ (f)_\Phi < \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{\nu_i^{r_i}},$$

где $A_{\nu_1 \ldots \nu_n}\ (f)_\Phi = \inf_{T_{\nu_1 \ldots \nu_n}} \sup_{c>0} \frac{1}{c} \Phi^{-1}\left[\int \Phi(c\,|\,f - T_{\nu_1 \ldots \nu_n}|)\,dv\right]$, причем $T_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ — любой тригонометрический полином порядка не выше $\nu_1, \ldots, \nu_n$, соответственно, по $x_1, \ldots, x_n$.

Вторая теорема формулируется аналогично теореме 13 и касается существования смешанной производной у функции из $H_\Phi^{(r_1,\ldots,r_n)}$. Третья теорема распространяет теорему вложения 12 и дает условие, при котором из того, что $f \in H_\Phi^{(r_1,\ldots,r_n)}$ следует: $f \in H_\Psi^{(\rho_1,\ldots,\rho_m)}$ при любых фиксированных $x_{m+1}, \ldots, x_n$, где $\Phi(u)/\Psi(u)$ убывает с возрастанием u.

А. А. Конюшков

664. Об одном функциональном пространстве. Грошев А. В., Тр. Уральск. политехн. ин-та, 1954, № 51, 77—81

Рассматривается класс неубывающих функций, заданных на $[0,1]$ и подчиненных условию $|f(x)| \leqslant c$, где $c > 0$ фиксировано. В этом классе сходимость в среднем равносильна сходимости почти всюду.

И. П. Натансон

665. О сходимости рядов Фурье по функциям Уолша. Шнейдер А. А., Матем. сб., 1954, 34 (76), № 3, 441—472

Рассматривается полная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ функций Уолша, измененных на счетном множестве. Доказывается ряд новых теорем о свойствах системы Уолша, а также обобщается ряд известных результатов.

Каждому целому числу N можно сопоставить число $\eta(N)$, равное наименьшему возможному числу отличных от нуля θ_i в разложении

$$N = \sum_{i=0}^{m} \theta_i 2^i, \text{ где } \theta_i = -1, 0, 1.$$

При $N \geqslant 4$ справедливо неравенство $\eta(N) \leqslant \log_2 N$. Показывается, что числа $\eta(N)$ имеют непосредственное отношение к системе $\{\varphi_n(x)\}$.

Приведем наиболее характерные теоремы:

Теорема 1. Если L_N — константы Лебега системы Уолша, то

$$1/3 < L_N/\eta(N) \leqslant 1\ (N = 1, 2, \ldots), \overline{\lim_{N\to\infty}} L_N/\eta(N) = 1,$$

$$\lim_{N\to\infty} L_N/\eta(N) < 1.$$

Теорема 2. Пусть $f(x) \in L(0,1)$, $S_k(x)$ — k-я частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по системе Уолша и пусть $\frac{1}{h}\int_0^h |f(x)-f(x+t)|\,dt \Rightarrow 0$ при $x \in E$ ($\Rightarrow$ означает равномерное стремление к пределу). Если $\{N_p\}$ — такая возрастающая последовательность натуральных чисел, что $\{\eta(N_p)\}$ ограничена, то $S_{N_p}(x) \Rightarrow f(x)$ при $x \in E$. Если же $\lim\limits_{p\to\infty} \eta(N_p) = \infty$, то $S_{N_p}(x)/\eta(N_p) \Rightarrow 0$ при $x \in E$.

Заметим, что тригонометрическая система не обладает таким свойством.

Обобщенным аналогом теоремы Колмогорова, Селиверстова и Плеснера является

Теорема 5. Если $W(N)$ — положительная неубывающая функция, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 W(k)$ сходится и $\{N_p\}$ — последовательность возрастающих натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $\eta(N) \leqslant W(N)$, то последовательность сумм $S_{N_p}(x) = \sum_{k=1}^{N_p} c_k \varphi_k(x)$ сходится почти всюду на $[0, 1]$.

Очевидно, что если $N_p = p$ и $W(n) = \log_2 n$, то получим теорему Пейли и Виленкина.

Теорема 7. Если $f(x) \in L^2(0,1)$, то можно найти последовательность $\{N_p\}$ (зависящую от $f(x)$) такую, что $\lim\limits_{p\to\infty} N_{p+1}/N_p = 1$ и последовательность сумм $S_{N_p}(x)$ сходится почти всюду.

В статье имеются опечатки. Например, стр. 444, строка 7 сверху, вместо $i = 1$ должно быть $i = 0$; там же, строка 14 сверху, вместо $2^\nu + 2$ должно быть $2^\nu + 1$. *И. Л. Ульянов*

666. О суммируемости ортогональных рядов. Алексич (Sur la sommabilité des séries orthogonales. Alexits Georges), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, 4, № 3—4, 181—189 (франц.; резюме русс.)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ есть ортонормированная система функций на интервале (a, b). Обозначим через

$$K_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\varphi_k(x),$$

$$K_n^{(1)}(t,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n} K_\nu(t,x)$$

ядра для методов $(C, 0)$ и $(C, 1)$, а через

$$L_n(x) = \int_a^b |K_n(t,x)|\,dt, \quad L_n^{(1)}(x) = \int_a^b |K_n^{(1)}(t,x)|\,dt$$

— соответствующие функции Лебега.

Как показал Качмаж (Kaczmarz S., Studia math., 1929, 1, 87—121), если

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < +\infty \qquad (1)$$

и если $L_n^{(1)}(x) \leqslant C$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, для всех $x \in E$, где C — постоянная, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \qquad (2)$$

суммируется методом $(C, 1)$ почти всюду на E. Автор доказывает следующую теорему:

Если $L_{2^n}(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, равномерно ограничены на некотором множестве E и если выполнено условие (1), то ряд (2) суммируется методами (C, α) почти всюду на E для любого положительного α.

Дается также более простое доказательство теоремы Качмажа, которая формулируется следующим образом:

Если $L_n^{(1)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, равномерно ограничены на некотором множестве E и если выполнено условие (1), то ряд (2) суммируется методами (C, α) почти всюду на E для любого положительного α.

В теореме Качмажа метод $(C, 1)$ можно заменить любым методом (C, α), $\alpha > 0$, на основании теоремы Зигмунда (Zygmund A., Fundam. math., 1927, **10**, 356—362), которая утверждает, что при выполнении условия (1) из суммируемости ряда (2) методом $(C, 1)$ на некотором множестве E следует суммируемость этого ряда методами (C, α) почти всюду на E для любого положительного α.

Автор рассматривает обобщенные функции Уолша и Хара. Система функций $\{\psi_n(x)\}$ называется многократно ортонормированной (multiplement orthogonal et normé), если

$$\int_a^b \psi_{\nu_1}(x)\psi_{\nu_2}(x)\ldots\psi_{\nu_p}(x)\,dx = 0,$$

$$\int_a^b \psi_{\nu_1}^2(x)\psi_{\nu_2}^2(x)\ldots\psi_{\nu_p}^2(x)\,dx = 1$$

для любой системы индексов $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$, не состоящей в точности из $p/2$ пар, каждая из которых содержит одинаковые индексы. Этим условиям удовлетворяет, в частности, система $\{r_n(x)\}$ функций Радемахера.

Система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется обобщенной системой Уолша, если

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \quad \varphi_n(x) = \psi_{\nu_1}(x)\psi_{\nu_2}(x)\ldots\psi_{\nu_p}(x) \quad (n > 0),$$

где $n = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_p}$, $1 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_p$, и $\psi_n(x)$ удовлетворяют предыдущим условиям при $a = 0$, $b = 1$. Если $\psi_n(x) = r_n(x)$, то система $\{\varphi_n(x)\}$ есть обычная система Уолша.

Доказывается теорема:

Если $\{\varphi_n(x)\}$ есть обобщенная система Уолша, порождаемая функциями $\psi_n(x)$, причем $|\psi_n(x)| \leqslant 1$ на $[0, 1]$, то из условия (1) следует суммируемость ряда (2) почти всюду на $[0, 1]$ методами (C, α) для любого положительного α.

Как известно, функции Хара $\{\chi_n^{(k)}(x)\}$ могут быть получены из функций Уолша $\{\varphi_n(x)\}$ при помощи соотношений

$$\chi_0^{(0)}(x) \equiv 1, \quad \chi_1^{(1)}(x) = \varphi_1(x),$$

$$\chi_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \sum_{\nu=2^{n-1}}^{2^n-1} \alpha_{k\nu}^{(n)} \varphi_\nu(x),$$

$$(1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1},\ n = 2, 3, \ldots),$$

где $\alpha_{k\nu}^{(n)}$ — некоторые определенные постоянные величины, равные ± 1.

Функции $\chi_n^{(k)}(x)$ называются обобщенными функциями Хара, если в предыдущих равенствах $\varphi_n(x)$ являются обобщенными функциями Уолша.

Доказывается теорема:

Ряд Фурье от функции $f(x) \in L^2$ по обобщенным функциям Хара суммируется почти всюду методами (C, α) для любого положительного α.

Из ее доказательства следует, что автор предполагает выполненным условие $|\psi_n(x)| \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1$, для системы $\{\psi_n(x)\}$, порождающей обобщенную систему Уолша $\{\varphi_n(x)\}$. *Д. Е. Меньшов*

667 К. **Введение в общую теорию множеств и функций.** Александров (Úvod do obecné theorie množin a funkcí. Aleksandrov P. S., z rus. orig. «Vvedenije v obščuju teoriju množestv i funkcij». přel., I vyd., 343, [I] s., Praha, Nakl. Čs. ak. věd., 1954, 36 Kčs.), Česká kniha, 1954, 14, № 109—115, 443 (библ.)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

668. **О пределах неопределенности по мере частных сумм тригонометрических рядов.** Меньшов Д. Е., Матем. сб., 1954, 34 (76), № 3, 557—574

Измеримая функция $F(x)$ называется верхним пределом по мере на $[a, b]$ последовательности $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), \ldots$, если

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes}\{E[f_m(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} = 0$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$ и

$$\overline{\lim}\ \operatorname{mes}\{E[f_m(x) > \psi(x)] \cdot E[F(x) > \psi(x)]\} > 0$$

для любой измеримой функции $\psi(x)$, для которой

$$mE[F(x) > \psi(x)] > 0.$$

Аналогично определяется нижний предел по мере.

Доказывается теорема:

Для любых измеримых функций $F(x)$ и $G(x)$, для которых $G(x) \leqslant F(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$, существует тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, и такой, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ функции $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ последовательности $S_{n_1}(x), S_{n_2}(x), \ldots, S_{n_k}(x), \ldots$, где $S_n(x)$ — частная сумма рассматриваемого ряда. *Н. К. Бари*

669. **О пределах неопределенности частных сумм универсальных тригонометрических рядов.** Меньшов Д. Е., Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика, 7, 3—33

Тригонометрический ряд называется универсальным, если для любой измеримой функции $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ найдется такая подпоследовательность $\{S_{n_i}(x)\}$ частных сумм этого ряда, которая сходится к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Он называется рядом типа $A(F_1, F_2)$, если для заданных на $[-\pi, \pi]$ измеримых функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ таких, что $F_1(x) \leqslant F_2(x)$ почти всюду на этом сегменте, подпоследовательность, удовлетворяющая условию $\lim_{i\to\infty} S_{n_i}(x) = f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$, существует для любой измеримой функции $f(x)$, для которой $F_1(x) \leqslant f(x) \leqslant F_2(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Тригонометрический ряд называется рядом типа $B(F_1, F_2)$, если для любых измеримых функций $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi_2(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$F_1(x) \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \psi_1(x) \leqslant \psi_2(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant F_2(x)$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$, найдется такая подпоследовательность $\{S_{n_i}(x)\}$ частных сумм этого ряда, для которой $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ являются нижним и верхним пределами неопределенности по мере на $[-\pi, \pi]$ и, кроме того,

$$\lim_{i\to\infty} S_{n_i}(x) = \varphi_1(x) \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{i\to\infty}}\, S_{n_i}(x) = \varphi_2(x)$$

почти всюду на этом сегменте.

Если $F_1(x) = -\infty$ и $F_2(x) = +\infty$, то ряд типа $B(F_1, F_2)$ называется рядом типа B.

Доказывается теорема: для любых измеримых функций на $[-\pi, \pi]$ $F_1(x)$ и $F_2(x)$ классы рядов типа $A(F_1\ F_2)$ и $B(F_1, F_2)$ совпадают. В частности, справедлива теорема: класс универсальных тригонометрических рядов совпадает с классом рядов типа B. *Н. К. Бари*

670. **Доказательство одного предположения Штейнхауса.** Хелсон (Proof of a conjecture of Steinhaus. Helson Henry), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 3, 205—206 (англ.)

Штейнхаус высказал следующее предположение. Пусть тригонометрический ряд $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ обладает тем свойством, что его частные суммы $\sum_{-N}^{N} a_n e^{inx}$ неотрицательны для всех x и для всех достаточно больших N. Тогда a_n стремится к нулю при $|n| \to +\infty$.

Автор делает менее ограничительное предположение, а именно:

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{-N}^{+N} a_n e^{inx} \right| dx$$

ограничен при $N \to \infty$, и доказывает, что тогда a_n действительно стремится к нулю. Из этого результата вытекает справедливость гипотезы Штейнхауса *Н. К. Бари*

671. **Дополнение к работе «К проблеме единственности разложения функции в тригонометрический ряд».** Пятецкий-Шапиро И. И., Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика, 7, 79—97

В реферате используется терминология, употребленная в указанной в заглавии статье автора

(Уч. зап. МГУ, 1952, вып. 155, Математика, 5, 54—72). Разъяснение роли вводимых понятий можно найти в статье референта (Успехи матем. наук, 1949, 4, № 3, 13—68).

В указанной статье автор допустил ошибку при доказательстве теоремы 1 и, опираясь на эту теорему, построил пример M-множества, не являющегося M-множеством в узком смысле. В реферируемой статье он отмечает, что теорема 1 неверна и доказывает три новых теоремы, дающие достаточные условия для того, чтобы замкнутое множество было U-множеством. При помощи этих теорем заново строится пример M-множества, не являющегося M-множеством в узком смысле. Далее изучаются совершенные множества с постоянным отношением ξ (для канторова множества $\xi = 1/3$). Салемом было доказано, что если $\delta = 1/\xi$ не есть число Пизо, то соответствующее множество есть M-множество. Если же δ — число Пизо, то вопрос оставался открытым (в доказательстве Салема того, что тогда множество есть U-множество, содержится ошибка). Автор доказывает, что если δ — есть число Пизо степени n и $\delta > 2^n$, то соответствующее множество есть U-множество. *Н. К. Бари*

672. О сходимости одного процесса для вычисления коэффициентов Фурье. Мюллер (Über die Konvergenz eines Verfahrens zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten. Müller Max), Math. Z., 1954, **60**, № 1, 81—87 (нем.)

Пусть $C_n(x) = \operatorname{sign}\,[\cos\,(2\pi\,nx/\omega)]$, $S_n(x) = \operatorname{sign}\,[\sin\,(2\pi\,nx/\omega)]$; $f(x)$ — функция из $L_2(0, \omega)$ с периодом ω. Наряду с коэффициентами Фурье $a_\nu = (2/\omega)\int_0^\omega f(x)\cos(2\pi\nu x/\omega)\,dx$, $b_\nu = (2/\omega)\int_0^\omega f(x)\times \sin(2\pi\nu x/\omega)\,dx$ рассматриваются величины $\gamma_n = (\pi/2\omega)\int_0^\omega f(x)\,C_n(x)\,dx$, $\sigma_n = (\pi/2\omega)\int_0^\omega f(x)\times S_n(x)\,dx$. С помощью формулы Парсеваля получается бесконечная система линейных уравнений для определения a_ν и b_ν:

$$\gamma_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda a_{(2\lambda+1)\,n}/(2\lambda+1),$$
$$\sigma_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{(2\lambda+1)\,n}/(2\lambda+1). \qquad (1)$$

Показывается, что при сделанном предположении $f \in L_2(0, \omega)$ эта система всегда разрешима, а именно

$$a_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \mu(2\nu+1)\,\gamma_{(2\nu+1)\,n}/(2\nu+1),$$
$$b_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu(2\nu+1)\,\sigma_{(2\nu+1)\,n}/(2\nu+1), \qquad (2)$$

где $\mu(k)$ — функция Мёбиуса. Ранее системой (1) занимался Теребеси (Terebesi P., Arch Elektrotechnik, 1934, **31**, 195—200), который получил приближенные решения системы (1), беря первые l уравнений и ограничиваясь в правых частях l членами. Эти приближения $a_n^{(l)}$ и $b_n^{(l)}$ оказываются частными суммами рядов (2) с номерами $[(l-n)/2n]$ (квадратные скобки обозначают целую часть). При некоторых предположениях о гладкости $f(x)$ оценивается точность приближений $a_n^{(l)}$, $b_n^{(l)}$. *Ф. В. Широков*

673. Об одном классе полиномиальных операций. Николаев В. Ф., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 1, 17—19

Пусть $U_{n,\,m}$ есть линейный оператор, определенный в пространстве $\tilde{C}$ (2 π-периодических непрерывных функций) и обладающий свойствами: 1) значения оператора $U_{n,\,m}$ суть тригонометрические полиномы не выше $(n+m-1)$-го порядка (n, m — натуральные числа); 2) тригонометрические полиномы порядка не выше n являются неподвижными точками оператора $U_{n,\,m}$.

Доказывается теорема:

Если n делится на m, то среди всех операторов $U_{n,\,m}$ наименьшую норму имеет оператор Валле-Пуссена

$$S_{n,\,m} = \frac{1}{m}(S_n + S_{n+1} + \ldots + S_{n+m-1}),$$

где S_n — n-я частная сумма Фурье функции. При этом, если $n = mp$, то $\|S_{mp,\,m}\| = L_p$, где L_p есть константа Лебега для суммы Фурье S_p. Для случая $m = 1$ эта теорема была доказана ранее С. М. Лозинским (Докл. АН СССР, 1948, **61**, № 2, 193—196). *И. Г. Соколов*

674. Круговая суммируемость C двойных тригонометрических рядов. Шапиро (Circular summability C of double trigonometric series. Shapiro Victor L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 2, 223—233 (англ.)

Теорема Плесснера о необходимом и достаточном условии суммируемости C тригонометрического ряда одного переменного (Plessner A., Trigonometrische Reihen, Berlin — Leipzig, 1929, 1380—1382) распространяется на случай двойного тригонометрического ряда.

Определение 1. Ряд

$$\sum a_{mn} e^{i(mx+ny)} \qquad (1)$$

в точке (x, y) суммируем (C, η) $\eta > 0$, по кругам к $L(x, y)$, если

$$\lim_{R\to\infty} \sigma_R^{(\eta)}(x, y) = L(x, y), \text{ где}$$

$$\sigma_R^{(\eta)}(x, y) = \frac{2\eta}{R^{2\eta}}\int_0^R S_u(x, y)\,(R^2 - u^2)^{\eta-1}\,u\,du,$$

а $$S_u(x, y) = \sum_{(m^2+n^2)^{1/2}\leqslant u} a_{mn} e^{i(mx+ny)}.$$

Ряд (1) суммируем C по кругам, если существует такое $\eta > 0$, что он суммируем (C, η) по кругам.

Определение 2. Функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) обобщенный r-й лапласиан, равный a_r, если при достаточно малых $t > 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0 + t\cos\theta,\ y_0 + t\sin\theta)\,d\theta = \sum_{i=0}^{r}\frac{\alpha_i t^{2i}}{(2^i i!)^2} + o(t^{2r}).$$

Употребляется обозначение $\Delta_r f(x_0, y_0) = \alpha_r$. Показывается, что если у функции $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) непрерывны все частные производные порядка $2r$, то обобщенный лапласиан $\Delta_r f(x_0, y_0)$ существует и равен обычному лапласиану $\Delta^r f(x_0, y_0) = \Delta(\Delta^{r-1} f(x_0, y_0))$, где $\Delta^1 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Основная теорема. Для того чтобы ряд (1) с коэффициентами $a_{mn} = o((m^2+n^2)^\gamma)$, $\gamma \geqslant -1$, был суммируем C по кругам в точке (x_0, y_0) к величине S, необходимо и достаточно, чтобы существовало целое число $r > \gamma + 1$ такое, что если

$$F(x, y) = \frac{a_{00}(x+y)^{2r}}{2^r (2r)!} + \sum_{m^2+n^2\neq 0}\frac{(-1)^r\, mn}{(m^2+n^2)^r} e^{i(mx+ny)},$$

то $\Delta_r F(x_0, y_0) = S$. *П. Л. Ульянов*

675. **О суммировании интерполяционных процессов для функций двух переменных. Киприянов И. А.**, Докл. АН СССР, 1954, 95, № 1, 17—20

Обобщаются на двумерный случай теоремы С. М. Лозинского (Матем. сб., 1944, 14 (56), № 3, 175—268) о переносе методов суммирования рядов Фурье в теорию тригонометрического интерполирования по равноотстоящим узлам. Доказательства не приводятся. *И. П. Натансон*

676. **Главный член асимптотического разложения констант Лебега. Лорх** (The principal term in the asymptotic expansion of the Lebesque constants. Lorch Lee), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 4, 245—249 (англ.)

Пусть $g(t)$ — интегрируемая функция периода p, для которой существует интеграл $\int_0^1 t^{-1} g(t)\,dt$. Доказывается формула:

Если $\tau(\xi) = o(\xi)$ $(\xi \to \infty)$, то

$$\int_0^{1/\tau(\xi)} t^{-1} g(\xi t)\,dt = m \log\{\xi/\tau(\xi)\} + O(1) \qquad (\xi \to \infty),$$

где $m = \frac{1}{p}\int_0^p g(t)\,dt$.

Используя эту формулу, автор в качестве простых следствий получает известные выражения для главных членов асимптотических выражений констант Лебега различных методов суммирования рядов Фурье. *И. Г. Соколов*

677. **Обобщенные почти периодические функции. Досс** (On generalized almost periodic functions. Doss Raouf), Ann. Math., 1954, 59, № 3, 477—489 (англ.)

Дается новое определение класса B^p обобщенных почти периодических функций Безиковича (Besicovitch A. S., Bohr H., Acta math., 1931, 57, 203—292).

Автор строит следующий класс D^p-почти периодических функций.

Определение. Комплексная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ класса L^p называется D^p-почти периодической $(p \geqslant 1)$, если выполняются следующие условия:

1) $$\lim_{h\to 0}\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx\right\} = 0;$$

2) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует относительно плотное множество чисел τ (почти периодов) таких, что

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} |f(x+\tau) - f(x)|^p\,dx < \varepsilon;$$

3) для любого $a > 0$ можно построить периодическую функцию $f(x)$ класса L^p и периода a такую, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+ka) - f_a(x)\right|^p dx\right\} = 0.$$

Доказывается тождественность классов B^p и D^p. *А. С. Кованько*

678. **Тригонометрия и почти периодические функции. Чинкуини** (Trigonometria e funzioni quasi-periodiche. Cinquini Silvio), Archimede, 1954, 6, № 1, 1—8 (итал.)

Краткий элементарный очерк понятия почти периодичности функций. *А. С. Кованько*

679. **Один пример почти периодической функции. Саббиони** (Sopra un esempio di funzione quasi periodica. Sabbioni C.), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, № 3, 301—303 (итал.)

Приводится пример функции $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, почти периодической в смысле Бора, которая имеет почти всюду ограниченную производную $f'(x)$, следовательно, S-равномерно суммируемую, но в то же время $f'(x)$ не является функцией S-почти периодической.

При этом функция $\varphi(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ называется S-равномерно суммируемой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\int_a^{a+1} |\varphi(x)|\, c_E(x)\,dx < \varepsilon \quad \text{при}$$

$$\int_a^{a+1} c_E(x)\,dx < \delta \quad \text{и любом } a,$$

где $c_E(x)$ — характеристическая функция множества E. *А. С. Кованько*

680. **О многочленах, наименее уклоняющихся от нуля вместе со своими производными. Гельфонд А.**, Докл. АН СССР, 1954, 96, № 4, 689—691

Показано, что числа

$$\sigma_{n,m}=\min_{p_n}\max_{0\leqslant s\leqslant m}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\frac{\left|p_n^{(s)}(x)\right|}{n(n-1)\dots(n-s+1)},$$

где

$$p_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n,\quad n\geqslant m+2,\quad m\geqslant 0,$$

удовлетворяют двойному неравенству

$$2^{-n+m+1}\leqslant\sigma_{n,m}\leqslant 2^{-n+m+1}e^{O(m^2/n)},$$

при $m=o(\sqrt{n})$ экстремум асимптотически достигается для многочлена $T_{n,m}(x)$, определяемого формулами

$$T_{n,0}(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x,$$

$$T_{n,1}(x)=T_{n,0}(x)-\frac{n}{4(n-2)}T_{n-2,0}(x),$$

$$T_{n,k}(x)=T_{n,k-1}(x)-$$

$$-\frac{n(n-1)}{4(n-k)(n-k+1)}T_{n-2,k-1}(x),\quad 0\leqslant k\leqslant n-2.$$

Пусть $q(x)$ — многочлен степени не выше $m-1$, осуществляющий наилучшее приближение $\lambda_{n,m}$ многочлена $T_{n,m}(x)$ на отрезке $[-1,1]$; в таком случае разность $R_{n,m}(x)=T_{n,m}(x)-q(x)$ является единственным многочленом степени n со старшим коэффициентом единица, удовлетворяющим неравенству

$$\min_{p_n}\max\left\{\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p_n(x)|,\ \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\frac{(n-m)!\,\lambda_{n,m}}{n!\,2^{n-m-1}}\left|p^{(m)}(x)\right|\right\}\leqslant\lambda_{n,m}.$$

Я. Л. Геронимус

681. Плотность нулей действительных многочленов и чебышевское приближение. Венцль (Nullstellendichte reeler Polynome und Tschebyscheffsche Approximation. Wenzl F.), Math. Z., 1953, 59, № 1, 17—39 (нем.)

В дальнейшем $P_n(x)$ означает алгебраический многочлен степени n с коэффициентом при x^n, равным 1. Пусть нули ξ_l многочлена $P_n(x)$ удовлетворяют условию

$$-1<\xi_1<\xi_2<\dots<\xi_n<1.$$

Пусть далее

$$n\rho_n^*(\xi)=$$

$$=\begin{cases}1/(\xi_{\nu+1}-\xi_\nu), & \text{если } \xi_\nu\leqslant\xi<\xi_{\nu+1},\ \nu=1,2,\dots,n-1;\\ 0, & \text{если } \xi<\xi_1 \text{ или } \xi\geqslant\xi_n.\end{cases}$$

Функция $\rho_n^*(\xi)$ называется относительной плотностью нулей многочлена $P_n(x)$.

Доказывается:

1. Пусть точка x делит интервал $(\xi_m,\ \xi_{m+1})$ в отношении $\delta_4:\delta_3\leqslant 1$, причем $\delta_4+\delta_3=1$. Тогда

$$|P_n(x)|=\exp\left(\int_{-1}^{1}\ln|x-\xi|\,n\rho_n^*(\xi)\,d\xi\right)\times$$

$$\times(x+1)^{\delta_1}(1-x)^{\delta_2}(x-\xi_m)^{\theta_1}(\xi_{m+1}-x)^{\theta_2}e,$$

где

$$0<\delta_1,\ \delta_2<1/2,\ \theta_1=\delta_3-\delta_1,\ \theta_2=\delta_4-\delta_2.$$

Пусть задана последовательность многочленов $P_n(x)$ $(n=2,3,\dots)$ с простыми лежащими между -1 и 1 нулями, причем относительные плотности их нулей $\rho_n^*(\xi)$ равномерно ограничены в интервале $I^*\{|x|\leqslant 1-\varepsilon_0\}$, $0<\varepsilon_0<1:0<\gamma\leqslant\rho_n^*\leqslant G$.

Тогда имеют место теоремы:

2. Если точка $x_n\in I^*$ удалена от обоих соседних с нею нулей ξ_m и ξ_{m+1} многочлена $P_n(x)$ по меньшей мере на расстояние $(\xi_{m+1}-\xi_m)/q_0$, где $q_0>2$ — общее для всех значений n, то

$$\ln|P_n(x_n)|=n\left[\int_{-1}^{1}\ln|x_n-\xi|\,\rho_n^*(\xi)\,d\xi+\theta^*\right],$$

где $\theta^*=\mu\ln n/n$, причем $|\mu|<M$ и M зависит только от I^*, q_0, γ и G, но не от n.

Если X — принадлежащая I^* экстремальная точка многочлена $P_n(x)$, то

$$\ln|P_n(X)|=n\left[\int_{-1}^{1}\ln|X-\xi|\,\rho_n^*(\xi)\,d\xi+O(\ln n/n)\right].$$

Рассматривается задача: Пусть $g(x)$ — заданная непрерывная на $[-1,1]$ функция, не обращающаяся в нуль на интервале $(-1,\ 1)$. Среди многочленов $P_n(x)$ заданной степени n найти такой, для которого $\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}g(x)P_n(x)$ имеет наименьшее значение.

Доказывается:

4. Пусть $\{P_n(x)\}$ — последовательность решений приведенной задачи. Если относительные плотности $\rho_n^*(\xi)$ многочленов $P_n(x)$ в каждом интервале $I^*\{|\xi|\leqslant 1-\varepsilon_0\}$, $0<\varepsilon_0<1$, сходятся равномерно к непрерывной положительной функции $\rho^*(\xi)$, причем для $\xi\to\pm 1$ $\rho_n^*(\xi)<M|\xi\mp 1|^\alpha$, где $\alpha>-1$, то

$$\int_{-1}^{1}\ln|x-\xi|\,\rho^*(\xi)\,d\xi=\text{const для } -1<x<1.$$

М. Д. Калашников

682. О системах многочленов, ортогональных в двух интервалах. Мака и (On systems of polynomials orthogonal in two intervals. Maka i E.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3 — 4, 222—228 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ — действительные функции, не меняющие знака в областях интегрирования I_1 и I_2. Доказывается, что для существования системы многочленов

$$P_1(x),\ P_2(x),\dots,P_n(x) \tag{1}$$

степени не выше n, ортогональных с весом $\rho_1(x)$ в области I_1 и с весом $\rho_2(x)$ в области I_2, необходимо и достаточно, чтобы существовали моменты

$$M_\nu^{(1)}=\int_{I_1}x^\nu\rho_1(x)\,dx\quad\text{и}\quad M_\nu^{(2)}=\int_{I_2}x^\nu\rho_2(x)\,dx$$

$(\nu=0,1,\dots,2n)$ (интегралы берутся в смысле Лебега).

Если это условие выполнено, то при соответствующей нормировке для заданной пары весовых функций существует вообще одна и только одна система, удовлетворяющая требуемому условию ортогональности.

Если в качестве областей I_1 и I_2 взять интервалы (a_1, b_1) и (a_2, b_2) (для простоты предполагается $a_1 < b_1 \leqslant 0$ и $0 \leqslant a_2 < b_2$), то многочлены $P_k(x)$ $(k = 0, \ldots, n)$ оказываются в точности n-й степени и имеют действительные простые корни, лежащие либо в (a_1, b_1), либо в (a_2, b_2). Индексы у многочленов $P_k(x)$ можно выбрать так, чтобы $P_k(x)$ имел равно k корней в (a_1, b_1) и $n-k$ корней в (a_2, b_2).

Такой результат был получен Гейне и Стилтьесом (Szegö G., Orthogonal polynomials, New York, 1939, 147; Stieltjes, Acta Math., 1885, **6**, 321—326) для многочленов, являющихся решениями дифференциального уравнения

$$x(x-y)(x-z)\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-y} + \frac{C}{x-z}\right)\frac{du}{dx}\right] + \\ + (\varkappa x + \lambda)u = 0,$$

где A, B, C, $\varkappa$, λ, y и z постоянны. Самое существование решений этого уравнения в виде многочленов наблюдается при известных условиях, указанных Гейне и Стилтьесом; в реферируемой работе показывается, что эти многочлены ортогональны в интервалах $(y, 0)$ и $(0, z)$ при весовой функции

$$\rho(x) = x^{A-1}(x-y)^{B-1}(x-z)^{C-1}.$$

Н. К. Бари

683. О слабо весовых функциях. Ахиезер Н. И., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 6, 949—952

Функция $\Phi(x) > 0$, $-\infty < x < \infty$, называется p-слабо весовой, если для любой непрерывной на оси функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $f(x)/\Phi(x) \to 0$, $x \to \pm\infty$, и любого $\varepsilon > 0$ существует целая функция $H(z)$ степени не выше p такая, что

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|f(x) - H(x)|}{\Phi(x)} < \varepsilon. \qquad (1)$$

Доказывается, что функция $\Phi(x) \geqslant 1$ будет p-слабо весовой, если

$$\sup \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|G(x)|}{1+x^2}\,dx = \infty, \qquad (2)$$

где верхняя грань берется относительно всевозможных целых функций $G(z)$ степени не выше p, для которых

$$0 < |G(x)| \leqslant \Phi(x).$$

Из (2) следует полнота в смысле (1), если функция $\Phi(x) \geqslant 1$ такова, что множество точек, где $\Phi(x)$ конечна, имеет предельную точку на конечном расстоянии. Полученные результаты являются обобщением теоремы С. Н. Бернштейна о слабо весовых функциях (РЖМат, 1953, 1141). *С. Н. Мергелян*

684. О взвешенном приближении на вещественной оси. Виденский В. С., Докл. АН СССР, 1953, **92**, № 2, 217—220

Доказывается, что если четная функция $\Phi(x)$ нормально возрастает (т. е. $x\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \uparrow \infty$), то можно построить такую целую функцию

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} \quad (a_0 > 0,\ a_{2n} \geqslant 0), \qquad (1)$$

для которой при достаточно больших x ($|x| > x_0$) выполняются неравенства

$$\frac{x^2 - x_1^2}{x^2 x_1^2} F(x_1) < \Phi(x) < F(x) \quad (x_0 < x_1 < x). \qquad (2)$$

С помощью этих неравенств дано уточнение одной теоремы Мандельбройта о взвешенном приближении на всей оси посредством многочленов $P(x) = c_0 + c_1x^{k_1} + \ldots + c_nx^{k_n}$. Следует отметить, что это обобщение было ранее сделано другим методом в работе Хорвата (Horvath J., C. r. Acad. sci., 1948, **227**, 889).

Из неравенств (2) на основании одной теоремы С. Н. Бернштейна (Экстремальные свойства полиномов, М.—Л., 1937) следует теорема: если $x\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \uparrow \infty$, то расходимость интеграла $\int_{x^{-2}}^{\infty} \ln \Phi(x)\,dx$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $\Phi(x)$ была весовой. Автор отмечает, что эта теорема установлена в 1951 г. С. Н. Бернштейном и Л. Карлесоном.

Следует отметить, что достаточность этого условия была установлена в $L_2(-\infty, \infty)$ Идзуми и Кавата (Izumi S., Kawata T., Tôhoku Math. J., 1937, **43**, 267—274) и в более общем случае кривых в комплексной плоскости М. М. Джрбашяном (Докл. АН АрмССР, 1947, **7**, № 1, 3—10). Из этих результатов достаточность в $C(-\infty, \infty)$ следует непосредственно. Необходимость условия вытекает из результатов Н. И. Ахиезера и референта (Докл. АН СССР, 1947, **57**, № 4, 315—318). *К. И. Бабенко*

685. Замечание об ортонормированных системах в $L_2(a, b)$. Хьюитт (Remark on orthonormal sets in $L_2(a, b)$. Hewitt Edwin), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 4, 249—250 (англ.)

Дается короткое и простое доказательство теоремы: Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $p(x) \in L_2(a, b)$ почти всюду отлична от нуля и есть $O(e^{-\alpha|x|})$ для некоторого $\alpha > 0$ и $|x| \to \infty$ (если $a = -\infty$ или $b = +\infty$). Тогда функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, полученные из линейно независимой системы $\{x^n p(x)\}_{n=0}^{\infty}$ при помощи процесса ортогонализации Грама — Шмидта, образуют полную систему в $L_2(a, b)$.

Как следствие получается полнота систем многочленов Чебышева — Эрмита и Чебышева — Лагерра. *Б. М. Гагаев*

686 Д. Равномерное приближение как предельный случай приближений в среднем. Эдельман (Die Tschebyscheffsche Annäherung als Grenzfall von Annäherungen im Mittel. Edelmann H. Diss., Die Technische Hochschule Darmstadt, 1954), Z. Vereines dtsch. Ingr., 1954, **96**, № 17/18, 533 (библ.)

См. также: 558 К, 600, 601, 605, 689, 830, 868

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

687. О понятии «частичного модуля». Мамбриани (Sul concetto di «modulo parziale». Mambriani Antonio), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, 4, № 3, 227—232 (итал.)

Частичным модулем комплексного числа z по отношению к действительному числу θ автор называет число $|z|_\theta = |z|\cos(\theta - \arg z)$.

Рассмотрены элементарные свойства частичного модуля. *А. В. Батырев*

688. Инвариантные окружности дробно-линейного преобразования. Дрейзин (The invariant circles of a bilinear transformation. Drazin M. P.), Math. Gaz., 1954, 38, № 323, 26—29 (англ.)

Не всякое дробно-линейное преобразование оставляет на расширенной плоскости комплексного переменного инвариантной хотя бы одну окружность ненулевого радиуса. Доказывается, что для нетождественного дробно-линейного преобразования $w = (az+b)/(cz+d)$ инвариантная окружность существует тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$ и $(a+d)^2/(ad-bc)$ — действительное число. При этих условиях имеется бесконечно много инвариантных окружностей, и они образуют пучок, если $a+d \neq 0$, и два взаимно ортогональных пучка, если $a+d=0$. Исследуется зависимость расположения инвариантных окружностей от параметров дробно-линейного преобразования. *М. Б. Балк*

689. Простое доказательство теоремы Ломана — Меньшова. Хефтер (Einfacher Beweis des Satzes von Looman — Menchoff. Heffter Lothar), Arch. Math., 1953, 4, № 5/6, 446—447 (нем.)

Автор утверждает, что он получил элементарное доказательство теоремы Ломана — Меньшова, которая состоит в следующем.

Пусть функция $f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z \equiv x + iy$ в каждой точке области D удовлетворяет условиям:

1) $f(z)$ однозначна и непрерывна;

2) существуют конечные частные производные

$$u_1 \equiv \partial u/\partial x, \quad u_2 \equiv \partial u/\partial y, \quad v_1 \equiv \partial v/\partial x, \quad v_2 \equiv \partial v/\partial y;$$

3) u и v удовлетворяют условиям Коши — Римана

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = -v_1.$$

Тогда $f(z)$ есть аналитическая функция в D.

Эту теорему автор выводит хорошо известным методом из следующего утверждения:

Пусть действительная функция $f(x, y)$ двух действительных переменных x и y непрерывна и имеет конечные частные производные

$$\partial f/\partial x = f_1(x, y), \quad \partial f/\partial y = f_2(x, y)$$

в каждой точке прямоугольника R со сторонами, параллельными осям координат. В таком случае

$$-\oint_R f(x, y)\,dx = \iint_R f_2(x, y)\,dxdy,$$

$$\oint_R f(x, y)\,dy = \iint_R f_1(x, y)\,dxdy,$$

причем криволинейные интегралы в левых частях равенств берутся по контуру прямоугольника R в положительном направлении.

В реферируемой заметке автор не приводит доказательства этого утверждения и не объясняет, в каком смысле надо понимать двойные интегралы в правых частях равенств. Он отмечает только, что доказательство этого утверждения будет опубликовано в работе «Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen», которая должна появиться в печати в 1954 г. *Д. Е. Меньшов*

690. О поведении степенных рядов на граничных дугах регулярности. Роу (Sul comportamento delle serie di potenze sugli archi di regolarità. Roux Delfina), Atti IV congr. Uniome mat. ital., 1953, 2, 210—212 (итал.)

Обобщается следующая теорема Фату—Рисса: Пусть степенной ряд $f(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$ имеет единичный круг сходимости и $a_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Тогда ряд равномерно сходится на любой дуге (включая ее концы) регулярности единичной окружности.

Рассматриваются подпоследовательности $\{f_{n_h}(x)\}$ $(0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_h < \cdots)$ частичных сумм $f_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$. Приводится теорема 1:

Пусть $|x| = r$ и выполнены условия: при $u \leqslant h$, $u \to \infty$ имеют место соотношения:

$$(1-r)\frac{f_{n_h}(x) - f_{n_u}(x)}{x^{n_u}} \to 0, \text{ когда } r < 1; \quad (r-1) \times$$

$$\times \frac{f_{n_h}(x) - f_{n_u}(x)}{x^{n_h}} \to 0, \text{ когда } r > 1,$$

равномерно по x в области C. Тогда $f_{n_h}(x) \to f(x)$ $(h \to +\infty)$ равномерно на любой дуге регулярности, внутренней для C. Указана сверху оценка для величины $|f(x) - f_{n_h}(x)|$ (теорема 2). *М. П. Щеглов*

691. Предположение Блэкуэлла о степенных рядах со случайными коэффициентами. Рылл-Нардзевский (D. Blackwell's conjecture on power series with random coefficients. Ryll-Nardzewski C.), Studia math., 1953, 13, № 1, 30—36 (англ.)

Изучаются степенные ряды вида

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, z^n, \tag{1}$$

где $a_n(t)$ — комплекснозначные измеримые в смысле Лебега функции стохастической переменной t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, стохастически независимые в совокупности.

Ряд вида (1) называется случайным в отличие от обычного степенного ряда (с фиксированными коэффициентами). Из стохастической независимости коэффициентов следует, что почти для всех значений t ряд (1) имеет один и тот же радиус сходимости

$$r(F) = \overline{(\lim \sqrt[n]{|a_n(t)|})}^{-1}.$$

Доказывается теорема, уточняющая известное высказывание Бореля о том, что для рядов со случайными коэффициентами граница их круга сходимости с вероятностью 1 является купюрой.

Для каждого случайного ряда $F(z)$ можно указать такой обычный степенной ряд $f_0(z)$, что случайный ряд $F(z)+f_0(z)=H(z)$ будет обладать следующими свойствами:

I. $r(F+f)\leqslant r(H)$ для каждого обычного степенного ряда $f(z)$;

II. граница круга сходимости ряда $H(z)$ является купюрой (для почти всех t);

III. если какой-либо обычный ряд $f(z)$ удовлетворяет условию $r(F+f)=r(H)$, то граница круга сходимости ряда $F(z)+f(z)$ также является купюрой (для почти всех t). Автор показывает на примере, что введение обычного ряда $f_0(z)$ (вообще говоря, не равного тождественно нулю) существенно для справедливости теоремы. Предположение о том, что подобного рода теорема должна иметь место, было высказано устно в 1947 г. Блэкуэллом (D. Blackwell, Howard University).

А. Ф. Тиман

692. Заметка о гармонических функциях. Хелсон (Note on harmonic functions. Helson Henry), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 5, 686—691 (англ.)

Доказана теорема: Пусть $u(r, x)$ — гармоническая в единичном круге функция с разложением

$$u(r, x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|}\exp(inx),$$

где комплексные коэффициенты a_n принимают лишь конечное число различных значений. Пусть, сверх того, интеграл $\int_0^{2\pi}|u(r, x)|\,dx$ ограничен при $r<1$. Обозначим через $v(r, x)$ гармоническую функцию, сопряженную с $u(r, x)$. Тогда функция $u(r, x)+iv(r, x)$ — рациональная функция, имеющая все полюсы на окружности $r=1$.

Как отмечает автор, эта теорема примыкает к теореме Сегё (Szegö): Если коэффициенты степенного ряда функции $f(z)$ принимают лишь конечное число различных значений и $f(z)$ может быть продолжена во внешность единичного круга, то $f(z)$ — рациональная функция, все полюсы которой лежат на окружности. Указана связь теоремы с теорией операторов.

С. Я. Хавинсон

693. Базисные множества полиномов и их обратные множества, множества-произведения и множества-частные. Михаил (Basic sets of polynomials and their reciprocal, product and quotient sets. Mikhail M. N.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 3, 459—479 (англ.)

Пусть

$$\{p_n(z)=\sum_i^{D_n} p_{ni}z^i\} \qquad (1)$$

—базисное множество полиномов (исходные положения рассматриваемой теории и терминологию см. Whittaker J. M. «Sur les séries de base polynomes quelconques», Paris, 1949). Тогда $z^n=\sum\pi_{ni}p_i(z)$. Множество $\{P_n(z)=\sum_i\pi_{ni}z^i\}$ называется обратным к множеству (1). Если $\{p_n(z)\}$, $\{q_n(z)\}$ — базисные множества $\left(z^n=\sum\pi_{ni}p_i(z)=\sum\lambda_{ni}q_i(z)\right)$, то множество $\{u_n(z)\}=\{p_n(z)\}\{q_n(z)\}$ называется их множеством-произведением, если $u_{ij}=\sum_h p_{ih}q_{hj}$ $\left(z^n=\sum_i\mu_{ni}u_i(z);\ \mu_{ij}=\sum_h\lambda_{ih}\pi_{hj}\right)$. Если $\{u_n(z)\}\{q_n(z)\}=\{p_n(z)\}$, то $\{u_n(z)\}=\{p_n(z)\}\times\{Q_n(z)\}$ ($\{Q_n(z)\}$ — множество, обратное к $\{q_n(z)\}$) и $\{u_n(z)\}$ называется множеством-частным для множеств $\{p_n(z)\}$ и $\{q_n(z)\}$ $\left(\mu_{ij}=\sum_h q_{ih}\pi_{hj},\ u_{ij}=\sum_h p_{ih}\lambda_{hj}\right)$.

В реферируемой работе даются новые оценки для порядка и типа базисного множества, обратного множества и т. п. Даны также результаты относительно областей эффективности этих множеств.

Приведем некоторые из теорем работы:

Теорема 1. Если $\{p_n(z)\}$ — базисное множество полиномов, причем $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,D_n/n=a\,(a\geqslant 1)$, то для его порядка ω имеем равенство

$$\omega=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\log\max_{i,j}\{|\pi_{ni}||p_{ij}|\}}{n\log n}.$$

Это выражение для порядка, полученное для рассматриваемого класса базисных множеств, удобнее первоначального определения Уиттекера (цитированная выше книга, гл. XII), так как имеет дело только с коэффициентами, в то время как у Уиттекера используются максимумы модуля полиномов на окружностях радиуса R.

Теорема 2. Если $\{p_n(z)\}$ — базисное множество полиномов конечного порядка ω и конечного типа γ, то

$$\gamma\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{e}{n\omega}\max_{i,j}[|\pi_{ni}||p_{ij}|]^{1/(n\omega)}\right\}.$$

Теоремы 3—4. Если $\{p_n(z)\}$, $\{q_n(z)\}$ — базисные множества, для которых $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,D_n/n=a_p$, a_q (положительные конечные числа) и ω_p — порядок $\{p_n(z)\}$, то для порядков ω_{pq} и Ω_{pq} их множества-произведения и множества-частного имеем оценки:

$$\omega_{pq}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\log\max_m|\lambda_{nm}|}{n\log n}+a_q\omega_p+$$
$$+a_qa_p\left|\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\log\max_j|q_{nj}|}{n\log n}\right|,$$
$$\Omega_{pq}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\log\max_m|q_{nm}|}{n\log n}+a_q\omega_p+$$
$$+a_qa_p\left|\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\log\max_j|\lambda_{nj}|}{n\log n}\right|.$$

Для формулировки, в качестве примера, одной из теорем об областях эффективности положим, что $s(n)$, $d(n)$, $g(n)$ — последовательности целых чисел,

удовлетворяющие условиям:

$0 \leqslant s(n) < n$, $\lim\limits_{n\to\infty} s(n)/n = \sigma < 1$, $0 < d(n) < D_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty} d(n)/n = 1$; $n < g(n) \leqslant D_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(n)/n = \sigma' > 1$.

Введем также обозначения:

$$\sup_i |\pi_{ni}||p_{is(n)}| = b(n, s(n)),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \{b(n, s(n))\}^{1/\{n-s(n)\}} = b(s(n)), \sup_{s(n)} b(s(n)) = b.$$

Аналогичные выражения, построенные для $d(n)$ и $g(n)$, обозначим через C и B соответственно.

Теоремы 5 (b) и 7. Пусть $\{p_n(z)\}$ — базисное множество, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} D_n/n = a \geqslant 1$ и $C \leqslant 1$. Необходимым и достаточным условием эффективности множества на круге $|z| = R$ является в случае $a > 1$ выполнение неравенств $b \leqslant R \leqslant B$, а в случае $a = 1$ — неравенства $b \leqslant R$. *С. Я. Хавинсон*

694. Теоремы искажения и коэффициенты однолистных функций. Гуи Шэн (單葉函數之偏差定理及係數○型界) // 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, № 3, 231—250 (кит.; резюме англ.)

Доказывается несколько неравенств, улучшающих оценки для $|f(z)|$ и $|f'(z)|$ регулярной и однолистной внутри единичного круга $|z| < 1$ функции $f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots$ в зависимости от $|c_2|$, полученные Лебедевым и Милиным (Матем. сб., 1951, 28 (70), 359—400). Наиболее простые из них таковы:

$$|f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2} \exp\left[-\frac{(1+r)^2}{8} r(2-|c_2|)^2\right],$$

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3} \exp\left[-\frac{1+r^2}{4} r(2-|c_2|)^2\right],$$

где $|z| = r < 1$, $|c_2| \leqslant 2$.

Если $c_2 = c_3 = 0$, то

$$|f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2} \exp\left\{-\frac{(1+r)^2}{4r}\left[r + \frac{1}{r} - \frac{(1-r^3)^{2/3}}{r}\right]^2\right\},$$

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3} \exp\left\{-\frac{1+r^2}{2r}\left[r + \frac{1}{r} - \frac{(1-r^3)^{2/3}}{r}\right]^2\right\}.$$

Кроме того, автор получает оценки коэффициентов тех же функций:

$$|c_n| \leqslant \exp\left[1 - \frac{1}{2}(2-|c_2|)^2\right] n + O(\log n),$$

$$|c_n| \leqslant n + O(\log n) \text{ при } |c_2| \leqslant 2 - \sqrt{2},$$

$$|c_n| \leqslant \frac{n}{e^2} + O(\log n) \text{ при } c_2 = c_3 = 0.$$

И. Е. Базилевич

695. Однолистные функции, отображающие единичный круг на выпуклые области. Илиев (Schlichte Funktionen, die den Einheitskreis konvex abbilden. Ilieff Ljubomir), Докл. Болгар. АН, 1953, 5, № 2, 1—4 (нем.; резюме русс.)

Для множества σ_k функций $f_k(z) = z + \sum_1^\infty a_n^{(k)} z^{nk+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, отображающих этот круг на выпуклые области, устанавливаются оценки:

$$\left|\frac{f_k(z)}{z}\right| \geqslant (1+r^k)^{-1/k}, \quad |z| \leqslant r < 1, \qquad (1)$$

$$\left|\frac{f_k(z_1) - f_k(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \geqslant (1+r^k)^{-2/k}, \quad |z_1|, |z_2| \leqslant r < 1. \qquad (2)$$

При помощи второй оценки доказывается теорема: Если $f_k(z) \in \sigma_k$ и $\sigma_n^{(k)}(z) = z + a_1^{(k)} z^{k+1} + \ldots + a_n^{(k)} z^{nk+1}$, то существует такое целое число $N > 0$, что при $n > N$ функция $\sigma_n^{(k)}(z)$ однолистна в круге $|z| \leqslant r_n = [1 - 2k^{-1}(n+1)^{-1} \ln(n+1)]^{1/k}$.

Примечание референта. Неясно, в каком смысле автор считает точными оценки (1) и (2), так как указанная им миноранта $f_k(z) = z(1-z^k)^{-1/k}$ не принадлежит множеству σ_k. *Г. В. Корицкий*

696. Правильность однолистных функций. Хайман (La régularité des fonctions univalentes. Hayman Walter K.), C. r. Acad sci., 1953, **237**, № 25, 1624—1625 (франц.)

Пусть $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ — регулярная и однолистная функция в круге $|z| < 1$,

$$M(r, f) = \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |f(re^{i\theta})|$$

и

$$I(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Приводятся теоремы:

1. Существуют пределы

$$\alpha = \lim_{r\to 1} (1-r)^2 M(r, f), \quad \beta = \lim_{r\to 1} (1-r) I(r, f),$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} |a_n|/n,$$

причем $\alpha = 2\beta = \gamma$.

2. Если функция $f(z) = z + \sum_2^\infty a_n z^n$ регулярна и однолистна в круге $|z| < 1$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|/n < 1$, за исключением $f(z) = z/(1 - e^{i\theta} z)^2$.

Теорема 2 остается справедливой для функций, однолистных в среднем. Имеет место также аналог теоремы 1 для функций, p-листных в среднем, если $p > 1/2$. *И. Е. Базилевич*

697. Конформное отображение некоторых круговых четырехугольников как проблема о собственных значениях. Шталь ман (Konforme Abbildung gewisser Kreisbogenvierecke als Eigenwertproblem. Stallmann Friedemann), Math. Z., 1953, 59, № 3, 211—230 (нем.)

Показывается, что функцию $\eta(x)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}(x) > 0$ на круговой четырехугольник с равными углами $\delta\pi$ ($\delta \neq 0$) в плоскости η, можно представить в виде

$$\eta(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\delta \frac{z(x)}{z(-x)},$$

где $z(x)$ — решение дифференциального уравнения

$$(x^2-1)(qx^2-1)\,z'' + 2\,[(x+\delta)(qx^2-1) + (1-\delta)qx\,(x^2-1)]\,z' + q\,[(1-\delta)(2-\delta)\,x^2 + \delta\,(1-\delta)\,x]\,z + \lambda z = 0,$$

регулярное в точках $x = \pm 1$ и не имеющее нулей на интервале $(-1,1)$. Следуя идее В. А. Фока (Fock V., J. reine und angew. Math., 1929, **161**, 137—151), автор ищет соответствующее собственное значение λ и собственную функцию $z(x)$ в виде

$$\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu q^\nu,\ z(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu z_\nu(x)$$

(возможность разложения доказывается) и для $\eta(x)$ в круге $|x| < q^{-1/2}$ получает разложение

$$\eta(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\delta}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2\nu-1} c_\mu^{(\nu)} q^\nu x^\mu\right),$$

которое затем продолжается с помощью принципа симметрии. Для случая $\delta = 0$ аналогично получается

$$\eta(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1,3,\ldots}^{2\nu-1} c_\mu^{(\nu)} q^\nu x^\mu.$$

В плоскости $\eta^* = (\eta - 1)/(\eta + 1)$ «половина» рассматриваемого кругового четырехугольника состоит из кругового сегмента, опирающегося на $(-1,1)$, с выкинутым полукругом $|\eta^*| < R$, $\operatorname{Im}(\eta^*) > 0$, причем $R^2 = q^{1/2}\sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu q^\nu$. Коэффициенты $c_\mu^{(\nu)}$ и r_ν в обоих случаях определяются из системы алгебраических уравнений. В работе проведен также расчет отображения с использованием вспомогательного отображения на прямоугольник и соответствующей формы уравнения Ляме. Случай $\delta = 0$ был ранее рассмотрен В. А. Фоком (см. цитированную выше работу). *Л. И. Волковыский*

698. Плоскопараллельное кавитационное обтекание пластинки. Царантонелло (Parallel cavity flows past a plate. Zarantonello Eduardo H.), J. math. pures et appl., 1954, **33**, № 1, 29—80 (англ.)

Дается систематическое исследование возможных случаев кавитационного обтекания пластинки установившимся потоком несжимаемой идеальной жидкости в предположении ограниченности вектора скорости во всех точках замыкания области, заполненной жидкостью. Метод исследования, как и обычно (Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, М. — Л., 1950, 200—231), состоит в введении плоскости параметрического переменного и в рассмотрении комплексного потенциала и независимого переменного как функций параметрического переменного. В качестве области, соответствующей области течения жидкости, в плоскости t принята верхняя полуплоскость, в качестве искомых функций взяты $g(t) = dw/dt$ и $f(t) = [d\ln\zeta(t)/dt]^2$, где z — независимая переменная, в плоскости которой дано кавитационное течение, $\zeta(t) = dw/dz$, w — комплексный потенциал. *Г. Н. Положий*

699. Электрические поля между дуантами циклотрона. Меррей, Ратнер (Electric fields within cyclotron dees. Murray Raymond L., Ratner Lawrence T.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 1, 67—69 (англ.)

Решается задача о строении электростатического поля на плоскости с разрезами $y = \pm h$, $|x| \geqslant k$, если эти разрезы при $x \leqslant -k$ обладают потенциалом $V = -V_0$, а при $x \geqslant k$ — потенциалом $V = V_0$. Решение получается при помощи конформного отображения плоскости с указанными разрезами на полосу (причем бесконечность переходит в бесконечность) и выражается через элементарные функции. Приведенные графики облегчают численный анализ характеристик поля. Показаны результаты подсчета на частном примере. *А. Д. Мышкис*

700. Замечание к распределению значений экспоненциальных сумм. Виттих (Bemerkung zur Wertverteilung von Exponentialsummen. Wittich Hans), Arch. Math., 1953, **4**, № 3, 202—209 (нем.)

Рассматриваются основные характеристики и соотношения теории распределения значений аналитических функций (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, ГТТИ, М. — Л., 1941) для целых трансцендентных решений линейного дифференциального уравнения вида

$$w^{(m)} + p_{m-1}(z)\,w^{(m-1)} + \ldots + p_0(z)\,w = p(z), \qquad (1)$$

где $m \geqslant 2$, $p(z)$ и $p_j(z)$ — полиномы, причем $p_0(z) \not\equiv 0$. В частном случае, когда $p_j(z) \equiv \text{const}$ $(j = 0,1,\ldots, m-1)$ и $p(z) \equiv 0$, эти решения являются экспоненциальными суммами:

$$w(z) = \sum_{j=1}^{n} P_j(z)\,e^{a_j z},$$

где $P_j(z)$ — полиномы и a_j — постоянные.

Для экспоненциальных сумм вопросы распределения значений изучались в работе Швенгелера (Schwengeler E., Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen spezieller ganzer Funktionen, Zürich, 1925). Автор получает некоторые дополнительные результаты относительно распределения значений экспоненциальных сумм, а также указывает, какие из свойств экспоненциальных сумм распространяются на общий случай решений уравнения (1). Примерами таких свойств являются следующие: дефект $\delta(c, w)$ любого c такого, что $p(z) - cp_0(z) \not\equiv 0$, равен нулю; неравенство во второй основной теореме переходит в равенство для решений уравнения (1) и т. п. *А. Ф. Тиман*

701. Заметка о теореме Бореля. Ахмад (A note on a theorem of Borel. Ahmad Mansoor), Math. Student, 1953, **21**, № 3—4, 105—108 (англ.)

Известная теорема Бореля из теории целых функций конечного порядка утверждает, что если порядок функции $f(z)$ есть положительное целое число ρ, то для всех значений a, кроме, быть может, одного, показатель сходимости нулей функции $f(z) - a$ также равен ρ. Обобщая это предложение, автор доказывает, что для такой функции

$f(z)$ не может существовать более одной целой функции $\varphi(z)$, порядка меньшего ρ, при которой показатель сходимости нулей разности $f(z)-\varphi(z)$ был бы меньше ρ. *А. Ф. Тиман*

702. Целая функция с дефектным неасимптотическим и неинвариантным значением при замене начала координат. Хайман (An integral function with a defective value that is neither asymptotic nor invariant under change of origin. Hayman W. K.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 3, № 111, 369—376 (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция. Выражение

$$\delta(w)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,w)}{T(r)}=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r,w)}{T(r)},$$

где

$$T(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta,\ m(r,w)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-w}\right|d\theta,$$

$$N(r,w)=\int_0^r\frac{n(t,w)-n(0,w)}{t}\,dt+n(0,w)\log r,$$

а $n(t,w)$ есть число нулей уравнения $f(z)-w=0$ в $|z|\leqslant t$, называется дефектом w по отношению к $f(z)$. Значение w называется дефектным, если $\delta(w)>0$.

Коллингвуд впервые поставил вопрос о том, насколько необходимо, чтобы дефектное значение было асимптотическим, т. е. было пределом $f(z)$ при $z\to\infty$ вдоль некоторой кривой (Collingwood E. F., C. r. Acad. sci, 1924, **179**, 1125—1127).

Дюге (Dugué D., C. r. Acad. sci., 1947, **225**, 555—556) дал пример мероморфной функции $f(z)$, дефект которой изменяется при замене начала координат.

Однако обе эти проблемы остаются открытыми для целых функций.

Обозначая

$$M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|,\ \mu(r,f)=\min_{|z|=r}|f(z)|,$$

автор доказывает теорему:

Пусть

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{z}{n}\right)^{3n}\right]^{2^n}.$$

Тогда

1) $\mu\left(n+\frac{1}{2},\ f(z)\right)>\left[M\left(n+\frac{1}{2},\ f(z)\right)\right]^{4/5}$

при $n>n_0$.

Отсюда следует, что $f(z)$ не имеет конечного дефектного значения и $f(a+z)$ не имеет конечного асимптотического значения при любом a.

2) Если $|a|\geqslant 1/2$, то $\delta(0)\geqslant 10^{-21}/|a|$ по отношению к функции $f(a+z)$ и для всех достаточно больших r

$$\mu[r,f(a+z)]<M[r,f(a+z)]^{-\frac{1}{40}\log\log\log M[r,f(a+z)]}.$$

М. М. Джрбашян

703. О неравенствах для аналитических функций. Раджагопал (On inequalities for analytic functions. Rajagopal C. T.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 10, 693—695 (англ.)

Доказывается следующая теорема:

Если $f(z)\neq 0$ регулярна в круге $|z|<R$, $|f(z)|\leqslant M$ и $k\geqslant 1$ — наименьший номер, для которого $f^{(k)}(0)\neq 0$, то

$$|f^{(n)}(0)|/n!\leqslant(2M)/(R^n e),\ k\leqslant n\leqslant 2k-1,$$

и

$$|f'(z)|\leqslant(2RM)/[(R^2-|z|^2)e].$$

Доказательство основано на применении к $\ln f(z)$ известной оценки

$$|f^{(n)}(0)|/n!\leqslant 2[A(R)-\operatorname{Re}f(0)]/R^n,$$

где $A(R)=\max_{|z|<R}\operatorname{Re}f(z)$ (Jensen, Ann. Math., 1919—1920, **21**, 1—29). Автор показывает на примере функции $f(z)=\exp[(z^k+1)/(z^k-1)]$, $R=1$, что эти оценки не могут быть улучшены. *Н. С. Ландкоф*

704. Заметка о теоретико-функциональном тождестве. Флетт (Note on a function-theoretic identity. Flett T. M.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, ч. 1, № 113, 115—118 (англ.)

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в круге $|z|\leqslant r$, $f(z)\neq 0$ на $|z|=r$, и пусть

$$G(R)=\int g(R)\,d(\log R)\ (R\geqslant 0),$$

где $g(R)$ — абсолютно непрерывная функция для $R\geqslant 0$.

Спенсер (Spenser D. C., Amer. J. Math, 1943, 65. 147—160) доказал тождество

$$r\frac{d}{dr}\int_{-\pi}^{\pi}G\{|f(re^{i\varphi})|\}\,d\varphi=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^r g'(|f|)\,|f|^{-1}|f'|^2\,\rho\,d\rho\,d\varphi+$$

$$+2\pi g(0)\,n(r,0)-2\pi g(\infty)\,n(r,\infty).\qquad(1)$$

Здесь $n(r,0)$ обозначает число нулей, а $n(r,\infty)$ — число полюсов $f(z)$ в $|z|<r$.

Автор дает упрощенное доказательство тождества (1) при условии, что $g(R)$ и $g'(R)$ непрерывны.

В конце доказывается, что если $G(R)$ имеет вид $H(1+R^2)$, где $H''(t)$ непрерывна при $t\geqslant 1$, то аналогичное тождество имеет место и для гармонических функций. *С. А. Терсенов*

705. О голоморфных функциях, имеющих исключительные значения. Сюн Цзин-лай (Sur les fonctions holomorphes admettant des valeurs exceptionnelles. Hiong King-Lai), Ann. scient. École norm. supér., 1953, **70**, № 2, 149—180 (франц.)

Изучаются различные вопросы, связанные с поведением голоморфных и мероморфных функций, имеющих исключительные значения либо в смысле Пикара — Бореля, либо в смысле Неванлинна.

Даются оценки, связанные с этими функциями, устанавливаются теоремы типа Ландау и Шоттки, а также новые критерии нормальности и квазинормальности семейств таких функций. Работа является подробным изложением результатов, ранее опубликованных автором (РЖМат, 1953, 699—701). *С. Я. Хавинсон*

706. Заметка о многозначных аналитических функциях. Стоилов (Note sur les fonctions analytiques multiformes. Stoilow S.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, **25**, 69—74 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Пусть R_0 и R — римановы поверхности, из которых первая определяется посредством двумерного многообразия V_0 и внутреннего его отображения $z = T_0(p_0)$, $p_0 \in V_0$, в сферу Римана S, а вторая — посредством двумерного многообразия V и внутреннего его отображения $p_0 = T(p)$, $p \in V$, в R_0. Если для любого пути l на R_0 с концами в a и b и для всех $\alpha = T^{-1}(a)$ можно провести путь λ на V с концами в α и β такой, что $T(\lambda)$ и $b' = T(\beta)$ лежат в сколь угодно малых окрестностях соответственно l и b, то говорят, что R принадлежит к классу (I) относительно R_0, а соответствующие ей аналитические функции обладают свойством Иверсена (ср. Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М. — Л., 1941, 292).

Последовательность вложенных друг в друга областей $D_i \subset R$, ограниченных каждая одной жордановой дугой, и таких, что пересечение всех D_i на R пусто, определяет граничный элемент R. Если пересечение всех замыканий $T(D_i) \subset R_0$ пусто (состоит из одной точки, совпадает с R_0), то граничный элемент называется внешним (точечным; полностью накрывающим — totalement étalé) относительно R_0; в остальных случаях он называется частично накрывающим. Доказывается, что если R принадлежит к классу (I) относительно R_0, то возможны лишь два случая: либо все граничные элементы R точечные или внешние относительно R_0 и R конечнолистна относительно R_0, либо существует по крайней мере один полностью накрывающий граничный элемент; в последнем случае все не полностью накрывающие граничные элементы могут быть лишь точечными и внешними, а R бесконечнолистна относительно R_0. Соответственно этому аналитические функции $w(z)$, принадлежащие R, либо являются обобщенными алгеброидными функциями на R_0, т. е. удовлетворяют соотношению вида

$$w^n + A_1(z)\, w^{n-1} + \ldots + A_n(z) = 0,$$

где $A_i(z)$ — однозначные аналитические на R_0 функции, имеющие возможно всюду разрывное множество особенностей; либо функции $z(w)$, обратные к $w(z)$, являются полностью неопределенными относительно R_0 по крайней мере в одном граничном ее элементе, т. е. множество предельных значений такой функции относительно граничного элемента есть $T_0(V_0)$. Автор ограничивается указанием, что доказательство теоремы мало отличается от случая, когда R_0 является сферой (Stoilow S., Mathematica, 1943, **19**, 126—138).

Автор называет область на сфере S областью (I), если какая-либо лежащая над ней часть R ($R_0 \equiv S$) принадлежит к классу (I), и доказывает, что такие части всегда существуют. Напротив, на S не всегда существует область, относительно которой R была бы класса (I) (приводится пример). Для случая, когда такие области существуют, указывается их построение. *Л. И. Волковыский*

707. К теории функций многих переменных. О теореме Гаммерштейна. Вилль (Zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Über den Satz von Hammerstein. Will Herbert), Math. Ann., 1954, **127**, № 2, 175—180 (нем.)

Рассматривается задача аппроксимации полиномами любой функции, регулярной в области $\mathfrak{G}$ пространства C^n комплексных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и доказывается несколько видоизмененная теорема Гаммерштейна (Hammerstein A., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1953, 5, 259—266).

Теорема. Пусть область $\mathfrak{G}$ лежит в ограниченной звездной области регулярности $\mathfrak{S}$ и пусть $\mathfrak{W}$ — непрерывная кривая, соединяющая точки t_1 и t_2 комплексной плоскости t. Пусть, наконец, дано отображение A_t области $\mathfrak{S}$:

$$Z_\nu = T_\nu(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

обладающее следующими свойствами:

1) При t, фиксированном в некоторой окрестности $\mathfrak{A}(\mathfrak{W})$, функции T_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) регулярны в $\mathfrak{S}$; при фиксированной системе $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathfrak{S}$ T_ν — регулярные функции от t в $\mathfrak{A}(\mathfrak{W})$; T_ν — непрерывные функции от $z_1, z_2, \ldots, z_n, t_n$;

2) Если точка P лежит в $\mathfrak{G}$, то при $t \in \mathfrak{W}$ все точки $A_t(P)$ также лежат в $\mathfrak{G}$;

3) При $t = t_1$ преобразование A_t тождественное, т. е. $Z_\nu = z_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$);

4) Существует такой гипершар $\mathfrak{K}$, лежащий целиком в $\mathfrak{G}$, что образ $A_{t_2}(P)$ каждой точки P из $\mathfrak{G}$ лежит над $\mathfrak{K}$.

Тогда всякая регулярная в $\mathfrak{G}$ функция может быть равномерно аппроксимирована полиномами внутри этой области.

Доказательство теоремы опирается на предшествующие результаты автора, а также на понятие полунепрерывного расширения, которым автор, ради простоты, пользуется вместо эквивалентного понятия регулярного расширения, введенного Бенке и Штейном. *А. В. Лебедев*

708. Об одном контрпримере из теории квазианалитических функций. Сан-Хуан (Un contre-exemple de fonctions quasi analytiques. San Juan Ricardo), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 11, 1185—1186 (франц.)

Известно, что если $f(z)$ — аналитическая функция в некотором интервале и $f_1(z)$ — функция, принадлежащая какому-либо квазианалитическому классу в том же интервале, то из совпадения значений этих функций и всех их производных в одной точке следует их совпадение во всем интервале. Автор показывает, что это свойство имеет место и для некоторых неаналитических функций $f(z)$ и, следовательно, не является характеристическим для аналитических функций.

А. И. Маркушевич

См. также: 558К, 640, 655, 709, 710, 712, 715, 716, 755, 806, 875

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

709. Решение одного класса линейных дифференциально-разностных уравнений. Миролюбов А. А., Матем. сб., 1954, 34(76), № 2, 357—384

Изучаются в комплексной плоскости аналитические решения уравнения

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m}(a_{pq}x+b_{pq})f^{(p)}(x+h_q)=F(x), \qquad (1)$$

где a_{pq} и b_{pq} — постоянные коэффициенты, $a_{nm}\neq 0$, $a_{n0}\neq 0$; h_q — действительные разности, $0=h_0<h_1<\cdots<h_m$; $F(x)$ — функция, аналитическая в некоторой области (основные результаты без доказательства приведены автором ранее в Докл. АН СССР, 1952, 85, № 6, 1209—1210).

Пусть $F(x)$ регулярна в односвязной области G; S — замкнутый контур в G; A и B — точки S соответственно с наибольшей и наименьшей мнимой частью; S_1 и S_2 — соответственно правая и левая части S, на которые S разбивается точками A и B; S_1^* — кривая, получаемая из S_1 сдвигом вправо на h_m; l_1 — луч, выходящий из точки $x=-\dfrac{b_{nm}}{a_{nm}}+h_m$ в направлении положительной части действительной оси; l_2 — луч, выходящий из точки $x=-\dfrac{b_{n0}}{a_{n0}}$ в направлении отрицательной части действительной оси; G^* — область, получаемая из плоскости удалением лучей l_1 и l_2 и бесконечных полуполос P_1 и P_2, из которых первая описывается движением S_1^* вправо до ∞, а вторая — движением S_2 влево до ∞.

Показывается, что имеется функция $T(x)$, аналитическая в области G^*, которая удовлетворяет уравнению (1) внутри контура S. Всякое аналитическое решение уравнения (1) слагается из решения $T(x)$ и некоторого аналитического решения $\Phi(x)$ соответствующего однородного уравнения. Относительно $\Phi(x)$ получены следующие результаты:

1. $\Phi(x)$ регулярна в некоторой полосе $q_2<\operatorname{Im}x<q_1$.

2. $\Phi(x)$ есть сумма решений $f_1(x)$ и $f_2(x)$ однородного уравнения, аналитических соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im}x<q_1$ и $\operatorname{Im}x>q_2$ с разрезами вдоль лучей l_1 и l_2.

3. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ вдоль любого направления, непараллельного действительной оси, растут не быстрее функции экспоненциального типа.

4. Всякое решение вида $f_1(x)$ (или $f_2(x)$) представляется в виде предела последовательности линейных агрегатов, составленных из элементарных решений (вполне определенным образом построенных).

По характеру исследования и характеру результатов статья примыкает к работе референта (Матем. сб., 1949, 24(66), № 3, 347—374). Основным аппаратом исследования являются интегралы Лапласа.

А. Ф. Леонтьев

710. О некоторых линейных системах дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Томас (Über gewisse lineare Differentialgleichungssysteme mit periodischen Koeffizienten. Thomas Johannes), Ber. Math.-Tagung, Berlin, 1953, 226—230 (нем.)

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=\sum\limits_k\left(b_{ki}(t)\,x_k+c_{ki}(t)\,y_k\right)\\[2ex]\dfrac{dy_i}{dt}=-\sum\limits_k\left(a_{ik}(t)x_k+b_{ik}(t)y_k\right)\end{cases}\quad(i,k=1,\ldots,n),$$

где коэффициенты $a_{ik}(t)$, $b_{ik}(t)$, $c_{ik}(t)$ — непрерывные периодические функции $(-T<t<T)$ с периодом p, удовлетворяющие условиям

$$a_{ik}(t)=a_{ki}(t),\ c_{ik}(t)=c_{ki}(t),$$

$$a_{ik}(t)=a_{ik}(-t),\ b_{ik}(t)=-b_{ik}(-t),$$

$$c_{ik}(t)=c_{ik}(-t).$$

Пусть

$$\begin{pmatrix}x_1^1 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & & \vdots\\ x_n^1 & \cdots & x_n^n\\ y_1^1 & \cdots & y_1^n\\ \vdots & & \vdots\\ y_n^1 & \cdots & y_n^n\end{pmatrix}$$

— матрица фундаментальной системы решений (столбцы — решения).

Доказывается справедливость $n(2n-1)$ соотношений

$$\begin{cases}x_i^{\nu}(p)=y_{\nu}^{n+i}(p)\ (i,\ \nu=1,\ldots,n)\\ x_i^{n+\nu}(p)=x_{\nu}^{n+i}(p)\\ y_i^{\nu}(p)=y_{\nu}^{i}(p)\end{cases}(i<\nu,\ i=1,\ldots,n-1,\ \nu=2,\ldots,n).$$

Указывается, что возможно обобщение на случай комплексного переменного для a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} аналитических в круге $|t|<T$. *В. А. Якубович*

711. О решении линейных дифференциальных уравнений. Пайу (Sur la résolution des équations différentielles linéaires. Paillioux Henri), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 8, 871—873 (франц.)

Формулируется следующая теорема:

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}A_i^j u_j=\varphi_i\quad(i=1,2,\ldots,n), \qquad (1)$$

где A_i^j — линейные дифференциальные операторы, φ_i — заданные функции. Тогда существуют такие

линейные операторы L, H_k, M_k и функции θ и ψ_k, что система

$$Lu_1 = \theta,\ H_k u_k = M_k u_1 + \psi_k \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

эквивалентна системе (1).

Доказательство теоремы не приводится, но в случае $n = 2$ для этого даются указания; показывается, как при $n = 2$ L, H и M можно найти делением операторов. *Э. Я. Риекстыньш*

712. Линейные разностные уравнения с периодическими коэффициентами. Йост (Lineare differenzengleichungen mit periodischen Koeffizienten. Jost Res), Comment. math. helv., 1954, **28**, № 2, 173—185 (нем.)

Рассматривается весьма частный вид разностного уравнения

$$\sum_{k=0,1,\ldots,r} a_k(z)\, H(z+k) = 0, \qquad (1)$$

где $a_k(z) = a_k(z+1)$ — рациональные функции от $v = e^{2\pi i z}$, поле которых обозначено через $\mathfrak{k}$, а $H(z)$ — искомая функция. Уравнение (1) посредством преобразования $wf(z) = f(z+1)$ приводится к уравнению

$$P(w)\, H(z) = 0,$$

где $P(w)$ — полином над полем $\mathfrak{k}$.

Относительно $P(w)$ предполагается следующее: 1. $P(w)$ неприводим в поле $\mathfrak{k}$; 2. Корни $w_k(v)$ уравнения $P(w) = 0$ не имеют точек разветвления ни при $v = 0$, ни при $v = \infty$. Значения $w_k(v)$ при таких v конечны и отличны от нуля.

Строится фундаментальная система решений уравнения (1) $H(z), \ldots, H(z+r-1)$, обладающих свойствами: 1) $H(z)$ мероморфна; 2) $H(z)$ может иметь полюсы только в особых точках (1), т. е. в тех точках, где $a_0(z)$ и $a_r(z)$ обращаются в нуль, если считать, что (1) путем умножения на некоторый полином относительно v приведено к виду, где все $a_k(z)$ являются взаимно простыми полиномами; 3) при больших значениях $|\operatorname{Im}(z)|$ функция $H(z)$ допускает представление вида

$$H(z) = \sum_{k=1}^{r} \mathfrak{P}^{(i)}(v^{\mu_i}) \exp z \log w_k^{(i)}(v^{\mu_i})$$
$$(i = 1,\ 2;\ \mu_i = (-1)^i).$$

Здесь $i = 1$ при $\operatorname{Im}(z) < -N$ и $i = 2$ при $\operatorname{Im}(z) > N$, $w_k^{(1)}(v^{-1})$ и $w_k^{(2)}(v)$ — значения $w_k(v)$ соответственно в окрестностях $v = \infty$ и $v = 0$, а $\mathfrak{P}_k^{(i)}(v^{\mu_i})$ — сходящиеся степенные ряды, содержащие конечное число членов с отрицательными степенями переменного.

Далее указаны те изменения, к которым приводит пренебрежение условием 2).

В заключение доказывается, что если дана система

$$y(z+1) = M(z)\, y(z),$$

где $y(z)$ — вектор из n элементов, а $M(z) = M(z+m)$ — квадратная матрица порядка n, элементы ксторой принадлежат полю $\mathfrak{k}_m$, отличающемуся от поля $\mathfrak{k}$ тем, что здесь $v = e^{\frac{2\pi i z}{m}}$, то отыскание решения этой системы приводится к отысканию решения уравнения (1). *Г. Л. Мизерюк*

713. Обыкновенные дифференциальные уравнения относительно функций со значениями в банаховом пространстве. Рихтер (Gewöhnliche Differentialgleichungen für Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum. Richter Vladimír), Arch. Math., 1953, **4**, № 5—6, 477—484 (нем.)

Рассматривается дифференциальное уравнение вида $dy/dt = f(t, y)$, где $y(t)$ — функция вещественной переменной t, значения которой принадлежат некоторому банахову пространству. Показывается, что, при некоторых естественных изменениях в формулировках, теорема Пеано существования решения дифференциального уравнения, теорема Камке единственности решения (Kamke E., Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1930, 139) и теорема существования и единственности решения для системы линейных уравнений переносятся на уравнения рассматриваемого вида без существенных изменений в доказательствах. Полученные результаты автор иллюстрирует некоторыми примерами бесконечных систем дифференциальных уравнений. *Ю. М. Березанский*

714. Об одном обобщении понятия интегральных кривых для разрывного поля направлений. Виктороvский Е. Е., Матем. сб., 1954, **34**(76), № 2, 213—248

Вводится понятие обобщенного решения уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

из точки (x_0, y_0). Предполагается, что $f(x, y)$ измерима в ограниченной области G;

$$M_1(x) = \operatorname{vrai}\max_{y \in G(x)} |f(x, y)|$$

суммируема.

Пусть $(x_0, y_0) \in G$; $M(x) = M_1(x) + \gamma$, где $\gamma > 0$; замкнутая область

$$P\left\{\begin{array}{l} x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha \\ y_0 - \int_{x_0}^{x} M(t)\, dt \leqslant y \leqslant y_0 + \int_{x_0}^{x} M(t)\, dt \end{array}\right.$$

содержится в G. Тогда обобщенным решением уравнения (1) из точки (x_0, y_0) называется функция $y = u(x)$, обладающая свойствами:

1) $u(x)$ определена и абсолютно непрерывна на $[x_0, x_0 + \alpha]$;

2) $u(x_0) = y_0$; $(x, u(x)) \in P$ при $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$;

3) при $\varepsilon > 0$, $N \subset G$, $\operatorname{mes} N = 0$ существует на $[x_0, x_0 + \alpha]$ функция $\psi(x)$ такая, что $(x, \psi(x)) \in G$, $f(x, \psi(x))$ суммируема на $[x_0, x_0 + \alpha]$;

$$|u(x) - \psi(x)| < \varepsilon,\ \left|\psi(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\, dt\right| < \varepsilon$$

при $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$; $(x, \psi(x)) \notin N$ почти всюду на $[x_0, x_0 + \alpha]$.

В § 1 доказывается существование максимального обобщенного решения $u_0(x)$, выходящего из

(x_0, y_0), причем если измеримое $K \subset [x_0, x_0 + \alpha]$ таково, что из $x \in K$ следует непрерывность $f(x, y)$ по y в точке $y = u_0(x)$, то почти везде на K $u_0'(x) = f(x, u_0(x))$.

Далее дается обобщение метода, развитого в § 1, в направлениях применения к системам уравнений и применения к промежуточным обобщенным решениям.

Изучаются топологические свойства множества обобщенных интегральных кривых, причем вводится понятие обобщенной интегральной воронки из какого-нибудь множества H и изучаются ее свойства. *П. И. Романовский*

715. Оценка типа и порядка экспоненциального роста решений линейных дифференциальных уравнений. Рабинович Ю. Л., Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика, 7, 205—207

Рассматривается уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(z)\, w^{(k)}(z) = 0$$

(z — комплексное переменное), где $P_k(z) = O(z^{p_k})$ при $|z| \to \infty$.

Пусть

$$r = \max\left(0, \frac{p_{n-h} - p_n + h}{h}\right), \quad h = 1, 2, \ldots, n.$$

В предположении $r > 0$ доказываются неравенства

$$\left|\frac{d^k w}{dz^k}\right| < A\,|z|^{(r-1)k}\, e^{(\mu+1)|z|^r}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где μ вычисляется некоторым образом по функциям $P_k(z)$. Если $P_k(z) = O(1)$ при $|z| \to \infty$, то

$$r = 1 \text{ и } \mu = \max_k \sup_{|z| \geqslant R} |P_k(z)|.$$

Доказывается, что при $r = 0$ решения имеют степенной порядок роста. *В. А. Якубович*

716. К теории обобщенного дифференциального уравнения Похгаммера. Хёфингер (Zur Theorie der verallgemeinerten Pochhammerschen Differentialgleichung. Höfinger E.), Monatsh. Math., 1954, **57**, № 4, 317—332 (нем.)

Автор ставит задачу найти семейство функций, удовлетворяющих линейному однородному дифференциальному уравнению n-го порядка по заданной конфигурации особых точек и характеру особенностей функции в окрестности этих точек.

Предполагается, что искомое семейство функций имеет $\rho + 1$ особых точек $a_1, \ldots, a_\rho, \infty$, причем в окрестности особой точки $z = a_1$ первые $n - 1$ функции представляются формальными рядами по целым положительным степеням $z - a_i$, а n-я функция—нормальным рядом с определяющим множителем

$$e^{p_i(z-a_i)}\,(z-a_i)^{b_i - 1 + \lambda(k_i+1)}, \text{ т. е.}$$

$$T_j^i(z) = Q_j^i(z - a_i) \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$T_n^i(z) = e^{p_i(z-a_i)}\,(z-a_i)^{b_i - 1 + \lambda(k_i+1)} \times$$

$$\times\, Q_n^i(z - a_i),$$

где

$$p_i(z - a_i) = \frac{c_{k_i}^i}{(z-a_i)^{k_i}} + \frac{c_{k_i}^i - 1}{(z-a_i)^{k_i - 1}} + \frac{c_1^i}{z - a_i}.$$

В окрестности $z = \infty$ функции представимы в виде

$$T_j^\infty(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^{-\lambda+1} Q_j^\infty\left(\frac{1}{z}\right) \quad (j = 1, \ldots, n-1),$$

$$T_n^\infty(z) = e^{p(z)}\left(\frac{1}{z}\right)^{b+\lambda(k-1)} Q_n^\infty\left(\frac{1}{z}\right),$$

где $Q_j^\infty\left(\frac{1}{z}\right)$ — ряды по целым положительным степеням $\frac{1}{z}$, $p(z) = c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \ldots + c_1 z$, $b = -b_1 - \ldots - b_\rho + \rho$.

Доказано, что обобщенное уравнение Похгаммера

$$\varphi_0(z)\, y^n - \left[\frac{\lambda - n}{1}\varphi_0'(z) + \psi(z)\right] y^{(n-1)} + \frac{\lambda - n + 1}{1} \times$$

$$\times \left[\frac{\lambda - n}{2}\varphi_0''(z) + \psi'(z)\right] y^{(n-2)} + \ldots + (-1)^i \times$$

$$\times \frac{(\lambda - n + 1)\ldots(\lambda - n + i - 1)}{(i-1)!}\left[\frac{\lambda - n}{i}\varphi_0^{(i)}(z) + \right.$$

$$\left. + \psi^{(i-1)}(z)\right] y^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n \times$$

$$\times \frac{(\lambda - n + 1)\ldots(\lambda - 1)}{(n-1)!}\left[\frac{\lambda - n}{n}\varphi_0^{(n)}(z) + \right.$$

$$\left. + \psi^{(n-1)}(z)\right] y = 0,$$

$$\varphi_0(z) = (z - a_1)^{k_1+1}(z - a_2)^{k_2+1}\ldots(z - a_\rho)^{k_\rho+1},$$

$$\psi(z) = \varphi_0(z)\left\{\sum_{i=1}^{\rho}\left[\frac{-k_i c_{k_i}^i}{(z-a_i)^{k_i+1}} - \ldots - \frac{c_1^i}{(z-a_i)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{b_i + k_i}{z - a_i}\right] + c_1 + 2c_2 z + \ldots + k c_k z^{k-1}\right\},$$

$$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_\rho + k + \rho,$$

есть единственное дифференциальное уравнение, общее решение которого представляет указанное семейство функций.

Данная работа является обобщением работы Похгаммера (Pochhammer, J. reine und angew. Math., 1870, **71**, 316—352). *Л. И. Донская*

717. Об одном результате Б. С. Попова. Латышева К. Я., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 4, 695—696

Показано, что результат Попова (РЖМат, 1953, 1182) после замены переменных получается в качестве частного случая разработанной автором (РЖМат, 1954, 3691) теории нахождения в замкнутом виде решения линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. *Г. К. Энгелис*

718. **Новое доказательство теоремы Перрона и некоторые свойства правильных систем. В и н о г р а д Р. Э.,** Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 2, 129—136

Речь идет о следующей теореме Перрона (Perron O., Math. Z., 1930, **32**, 703—728).

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$x' = A(t)\,x, \qquad (1)$$

где x — вектор, $A(t) = \| a_{ij}(t) \|$ — матрица n-го порядка. $a_{ij}(t)$ — непрерывные или кусочно-непрерывные комплексные функции t.

Тогда существует унитарное преобразование $x = U(t)\,y$, приводящее систему (1) к виду

$$y' = S(t)\,y \qquad (2)$$

с треугольной матрицей $S(t)$, диагональные элементы которой вещественны. При этом из ограниченности $A(t)$ следует ограниченность $S(t)$ и $U'(t)$.

Автор дает короткое и простое доказательство этой теоремы. В статье указано, что аналогичное доказательство было получено ранее Дилиберто (Diliberto S. P., On systems of ordinary differential equations, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, 1950).

Отметим следующие установленные в статье свойства правильных систем.

Пусть $x_1 \dots x_n$ линейно независимое решение системы (1) и x_k^* есть проекция вектора x_k на подпространство, порожденное векторами $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$. «Угол» между x_k и этим подпространством обозначим через $(x_k; x_k^*)$.

Т е о р е м а. Если система (1) с ограниченными коэффициентами правильная, то для любого ее решения $x(t) \neq 0$ существует $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|$ и для любой нормальной системы решений $x_1, \dots, x_n$ существуют и равны нулю $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sin (x_k; x_k^*)$ $(k = 2, 3, \dots, n)$.

Обратно, если хотя бы для одной фундаментальной системы $x_1, \dots, x_n$ существуют

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |x_k(t)| \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

а $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sin (x_k; x_k^*)$ $(k = 2, 3, \dots, n)$ существуют и равны нулю, то эта система решений нормальная и система (1) правильная.

Т е о р е м а. Пусть система (1) правильна и пусть $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ее характеристические показатели, занумерованные в произвольном порядке. Тогда уравнение (1) можно привести к виду (2) таким унитарным преобразованием, что для диагональных коэффициентов $s_{kk}(t)$ матрицы $S(t)$ будет

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t s_{kk}(\tau)\, d\tau = \omega_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Д. М. Гробман

719. **Заметка об устойчивости. М и л л е р** (A remark on stability. M i l l e r K e n n e t h S.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 3, 407—408 (англ.)

Рассматривается линейный оператор

$$L = p_0(t) \frac{d^n}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^n}{dt^{n-1}} + \dots + p_n(t),$$

где $p_i(t)$ — функции класса C^{n-i} $(i = 0,1, \dots, n)$ в интервале $I : [0, \infty)$ и $p_0 > 0$ на любом ограниченном замкнутом подмножестве из I. Показывается, что если $H(t, y)$ — функция Грина оператора L, а $\{\varphi_k(t)\}$ — n независимых частных решения уравнения $Lu = 0$, то условия

$$\int_0^\infty |H(t, y)|\, dt < \infty \text{ для всех } y \text{ из } I,$$

$$\int_0^\infty |\varphi_k(t)|\, dt \leqslant M < \infty \quad (k = 1, \dots, n)$$

эквивалентны. *И. Г. Малкин*

720. **Об одном утверждении К. П. Персидского. В и н о г р а д Р. Э.,** Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2, 125—128

К. П. Персидский в статье «О характеристических числах дифференциальных уравнений» (Изв. АН Казах. ССР, 1947, № 1, 5—47) высказал следующую теорему: Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений

$$x' = A(t)\,x, \quad 0 \leqslant t < \infty, \qquad (1)$$

пусть через $A_\tau(t)$ обозначена матрица, совпадающая с $A(t)$ в интервале $(0, \tau)$, а дальше продолженная периодически, и пусть

$$y' = A_\tau(t)\,y \qquad (2)$$

— периодическая система с матрицей $A_\tau(t)$. Обозначим характеристические показатели системы (1) через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а системы (2) через $\lambda_1(\tau)$, $\lambda_2(\tau), \dots, \lambda_n(\tau)$.

Тогда для правильности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{\tau\to\infty} \lambda_j(\tau) = \lambda_j^*$, и если это так, то при подходящей нумерации будет $\lambda_j^* = \lambda_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Автор показывает, что это утверждение, верное для случая треугольной матрицы $A(t)$, в такой общей формулировке неверно. Указывается метод построения систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, опровергающих утверждение К. П. Персидского; приводятся две конкретные системы, из которых одна обладает непрерывной матрицей $A_\tau(t)$. *Д. М. Гробман*

721. **Некоторые вопросы качественной теории обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Г о р б у н о в А. Д.,** Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика, **7**, 39—78

Изучаются свойства решений системы линейных уравнений методом, в основе которого лежат полученные автором оценки решений с помощью квадратичных форм (Горбунов А. Д., Вестн. Моск. ун-та, 1950, № 10, 19—26).

В первой главе детально изучаются свойства квадратичных форм с переменными коэффициентами. Во второй главе рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = L(t)\,x, \qquad (1)$$

где $L(t) = \{l_{ik}(t)\}$ — квадратная матрица порядка n, составленная из действительных однозначных и непрерывных функций $l_{ik}(t)$, каждая из которых определена при $-\infty < t < \infty$.

Пусть имеется существенно положительная квадратичная форма

$$G(t, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t)\,x_i\,x_k, \quad a_{ik} = a_{ki}.$$

где $a_{ik}(t)$ — однозначные непрерывно дифференцируемые функции, и пусть $g(t, x) = \frac{dG}{dt}$ — производная формы $G(t, x)$ в силу системы (1).

Автор получает следующие оценки решений уравнения (1):

$$|x_s| \leqslant \left[G(t_0, x^0) \frac{A^{(s)}_{n-1}(t)}{A^0_n(t)} \exp \int_{t_0}^{t} N_G(\tau)\,d\tau \right]^{1/2},$$

при $t_0 \leqslant t < \infty$,

$$|x_s| \leqslant \left[G(t_0, x^0) \frac{A^{(s)}_{n-1}(t)}{A^0_n(t)} \exp \int_{t_0}^{t} n_G(\tau)\,d\tau \right]^{1/2},$$

при $-\infty < t \leqslant t_0$.

Здесь $s = 1, 2, \ldots, n$, $N_G(t) = \max\limits_{G(t,x)=1} g(t, x)$, $n_G(t) = \min\limits_{G(t,x)=1} g(t, x)$, $A^0_n(t)$ дискриминант квадратичной формы $G(t, x)$ и $A^{(s)}_{n-1}(t)$ — минор порядка $n-1$, получаемый из $A^0_n(t)$ вычеркиванием s-й строки и s-го столбца.

Оценка называется точной, если она достигается соответствующей координатой некоторого решения при каждом t $(-\infty < t < \infty)$. Доказывается, что существуют квадратичные формы, реализующие точные оценки.

Приводятся доказанные автором ранее критерии устойчивости и монотонной устойчивости решений уравнения (1)(Горбунов А. Д., Вестн. Моск. ун-та, 1951, № 3, 15—23; № 6, 3—15; 1953, № 9, 49—55). *Е. А. Барбашин*

722. Об одном классе регулируемых систем. **Спасский Р. А.**, Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 3, 329—344

Исследуется устойчивость системы автоматического регулирования с m регулирующими органами. Исходными являются уравнения движения, записанные в канонических переменных

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sum_{s=1}^{m} g_{si}\,f_s(\sigma_s) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\dot{z}_{n+j} = \sum_{s=1}^{m} g_{s,n+j}\,f_s(\sigma_s) \quad (j = 1, \ldots, k),$$

$$\sigma_s = \sum_{r=1}^{n-k} \gamma_{sr}\,z_r,$$

где g, γ и λ — постоянные, причем $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$. Функции $f_s(\sigma_s)$ непрерывные, обеспечивающие единственность решений уравнений, $f_s(0) = 0$ и $\sigma_s f_s(\sigma_s) > 0$ при $\sigma_s \neq 0$. Характеристическое уравнение системы имеет k нулевых корней. Для этой системы устанавливаются достаточные условия единственности состояния равновесия и его асимптотической устойчивости при любых начальных отклонениях. Для решения последней задачи исходными являются результаты А. И. Лурье (Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, ГТТИ, 1951). Функция Ляпунова строится либо в виде

$$V = \sum_{i=1}^{n} F_i - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=n+1}^{n+k} A_\alpha z_\alpha^2,$$

где

$$F_i = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{a_{i\alpha}\,a_{i\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} z_\alpha\,z_\beta,$$

$a_{i\alpha}$ и $A > 0$ постоянные, либо в виде

$$V - \sum_{i=1}^{n} F_i - \sum_{s=1}^{m} B_s \int_0^{\sigma_s} f_s(\sigma_s)\,d\sigma_s,$$

где B_s — положительные постоянные. На исходные уравнения накладываются условия, обеспечивающие отрицательность производной функции V, составленной в силу этих уравнений. Это и будут условия устойчивости. Рассматриваются отдельные частные случаи, однако конкретных примеров не приводится. *И. Г. Малкин*

723. Уменьшение числа условий устойчивости в случае, когда коэффициенты характеристического уравнения положительны. **Кремер** (Die Verringerung der Zahl der Stabilitätskriterien bei Voraussetzung positiver Koeffizienten der charakteristischen Gleichung. Cremer L.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, 33, № 7, 222—227 (нем.; резюме англ., франц., русс.)

При помощи правила знаков Рауса и формулы Орландо определяется число k корней характеристического уравнения

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

лежащих в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z > 0$, при условии, что все коэффициенты a_ν положительны. Выясняется, что для определения k достаточно в этом случае знать каждый второй из n определителей Гурвица: $\frac{1}{2}k$ равно числу знакоперемен в ряду $H_{n-1}, H_{n-3}, \ldots H_1 (H_0)$ (здесь H_ν — определитель Гурвица ν-го порядка, $H_0 = a_0$). В частном случае, когда $H_{n-1} > 0$, $H_{n-3} > 0, \ldots$, отсюда получается критерий устойчивости Льенара и Шипара (J. math. pure et appl., 1914, 6, 10), который, повидимому, автору неизвестен. В двух других заметках (см. РЖМат, 1954, 1993) этот же результат излагается

применительно к определению условий устойчивости линеаризованной системы автоматического регулирования.

Основной результат работы и некоторые его обобщения были получены другим путем референтом (Теория матриц, Гостехиздат, 1953, 458—460).

Ф. Р. Гантмахер

724. Об асимптотической устойчивости решений системы дифференциальных уравнений. Ляпенко Н. Я., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 2, 237—239

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x, \qquad (1)$$

где x — n-мерный вектор, $A(t)$ — матрица, определенная для t из интервала $(0, \infty)$, причем $|A(t)| < M$. Пусть $B(t)$ — матрица, удовлетворяющая условиям $|B(t)| \leqslant M$, $|B(t_1) - B(t_2)| \leqslant \delta |t_1 - t_2|$ и корни $p_i(t)$ уравнения $\mathrm{Det} \| pE - B(t) = 0$ удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re}\,\{p_i(t)\} < -\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Если для всех t_0, t из $0 \leqslant t_0, t < \infty$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{t_0}^{t} [A(\tau) - B(\tau)]\,d\tau \right| \leqslant Q\,|t - t_0| + R,$$

где положительные постоянные δ, Q и R удовлетворяют условиям

$$QT + R \leqslant \frac{1}{4\,(1 + 2\,MTa^2 e^{-\gamma T})}, \qquad \delta \leqslant \frac{e^{\gamma T}}{4a^2 T^2},$$

в которых

$$a = \frac{2^n \lambda}{\gamma^n}, \quad \lambda = 2^{n-1} M^n \sqrt{(n-1)^{n-1}}, \quad T = \frac{4}{\gamma} |\ln 2a|,$$

то решение системы (1) удовлетворяет неравенству

$$|x(t)| \leqslant K e^{-\frac{\gamma t}{4}} |x(0)|, \quad t \geqslant 0.$$

Подробное доказательство не приведено.

Н. Н. Красовский

725. О группе преобразований, оставляющих инвариантной обобщенную систему уравнений Гамильтона в пространстве с $n = 3k$. Русак Б. И., Докл. АН УзССР, 1954, № 3, 3—6 (русск.; резюме узб.)

Рассматривается обобщенная каноническая система, введенная референтом, в пространстве с числом измерений $3k$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= \frac{\partial C}{\partial x_\beta} - \frac{\partial B}{\partial x_\gamma}, \quad \frac{dx_\beta}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial C}{\partial x_\alpha}, \\ \frac{dx_\gamma}{dt} &= \frac{\partial B}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial x_\beta}, \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, k \\ \beta = k + \alpha \\ \gamma = 2k + \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1949, № 7, 232—246). Ставится задача о построении преобразований

$$\xi_\nu = \xi_\nu(x_1, \ldots, x_{3k}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 3k),$$

не изменяющих структуру системы (1). Доказаны две теоремы о свойствах подобных преобразований.

И. С. Аржаных

726. Две заметки об устойчивости. Борг (Deux notes concernant la stabilité. Two notes concerning stability. Borg Göran., Actes du Colloque International des Vibrations non linéaires, Ile de Porquerolles, 1951, 21—29 pp., Publ. Sci. Techn. Ministère de l'Air, Paris, 1953, № 281) (франц., англ.)

Эти тесно связанные краткие и не совсем ясные заметки посвящены следующей проблеме.

В дифференциальном уравнении

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + LY = F(t)\,Y$$

Y — одноколонная матрица, имеющая n элементов, L — диагональная матрица с положительными постоянными элементами (квадратные корни никаких двух из них не сравнимы по модулю 1) и $F(t)$ — квадратная матрица, элементы которой являются непрерывными периодическими функциями с периодом 2π. Если $F(t) \equiv 0$, то все решения ограничены. Требуется определить, «как велика» может стать $F(t)$, не нарушая ограниченности решений. В первой, основной, заметке строится квадратная форма, коэффициенты которой являются элементами $F(t)$, и достаточное условие ограниченности решения указано с помощью некоторой верхней границы этой формы. Во второй заметке приводится несколько замечаний о другом подходе к той же задаче.

Хотя детали отнюдь не ясны, обсуждаемая идея интересна и было бы желательно более тщательное изложение.

L. A. MacColl

Перевод из Math Revs., 1954, 15, № 3, 223

727. О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $-y'' + P(t)y = \lambda y$. Лидский В. Б., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 2, 217—220

Рассматривается система k линейных дифференциальных уравнений, которая в матрично-векторной форме имеет вид:

$$-y'' + P(t)\,y = \lambda y, \qquad (1)$$

где $y(t)$ — k-мерный вектор с компонентами $(y_1(t), \ldots, y_k(t))$, $P(t)$ — вещественная симметрическая матрица с суммируемыми в каждом конечном интервале элементами, λ — комплексный параметр. Изучается вопрос о числе линейно независимых решений системы (1) с интегрируемым квадратом на полуоси при невещественном λ, т. е. таких, что

$$\int_0^\infty \sum_{s=1}^{k} y_s(t)\overline{y_s}(t)\,dt < \infty. \qquad (2)$$

Доказываются две теоремы:

1. Если $(P(t)h, h) \geqslant -q(t)(h, h)$ при любом k-мерном векторе h, где непрерывная функция $q(t) > \delta > 0$ и $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{q}} = \infty$, и, кроме того, функция $q(t)$ удовлетворяет одному из двух условий: а) $q(t)$ — монотонная функция t; б) $q(t)$ дифференцируема и $\overline{\lim_{t\to\infty}} \left|\frac{q'(t)}{q^{3/4}(t)}\right| < \infty$, то система (1) при лю-

бом невещественном λ имеет точно k линейно независимых решений с интегрируемым квадратом на полуоси $[0, \infty)$.

2. Если матрица $P(t)$ дифференцируема и при произвольном постоянном векторе h и всех $t < a$ имеют место неравенства: $(P(t)h, h) < 0$; $(P'(t)h, h) \leqslant \leqslant \frac{2+\varepsilon}{t}(P(t)h, h)$; $(\varepsilon > 0)$, то все решения системы (1) — с интегрируемым квадратом на полуоси $[0, \infty)$.

Для скалярного случая ($k = 1$) Сирсом (Sears D.B., Canad J. Math., 1950, **2**, 314) была доказана теорема 1, на которую автор опирается при доказательстве общей теоремы. *С. А. Орлов*

728. О существовании функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н., Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, № 3, 345—350

Рассматривается система

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где X_i — непрерывно дифференцируемые функции переменных $x_1, \ldots, x_n, t$ в области $t_0 \leqslant t < \infty$, $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$, обращающиеся в нуль в точке $O(0, \ldots, 0)$ при всех $t \geqslant t_0$.

Сначала в работе доказывается теорема: Для того чтобы решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ системы (1) было равномерно устойчиво в целом, необходимо и достаточно, чтобы во всем пространстве $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ существовала определенно-положительная, бесконечно большая функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ (определение см. в работе авторов, Докл. АН СССР, 1952, 86, 3), допускающая высший предел, бесконечно малый в точке O, имеющая определенно-отрицательную во всем пространстве $\{x_i\}$ производную dv'/dt.

Авторы называют систему уравнений (1) устойчивой по отношению к запаздываниям, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $\delta(\varepsilon) > 0$ и $h > 0$ такие, что, какова бы ни была система функций $\eta_{ij}(t)$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющих при $t \geqslant t_0$ неравенствам

$$|\eta_{ij}(t)| < h, \qquad (2)$$

всякое решение системы с запаздыванием аргумента

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t - \eta_{ij}), \ldots, x_n(t - \eta_{in}), t), \qquad (3)$$

начинающееся при $\tau = \tau_0 \geqslant t_0$ в δ-окрестности точки $O(0, \ldots, 0)$ не выйдет за пределы ε-окрестности этой точки при всех $t > \tau_0$. Пусть решение $x_i \equiv 0$ системы (1) устойчиво в целом. Авторы называют систему (1) устойчивой по отношению к запаздываниям в целом, если для любых двух чисел $R > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно указать постоянное число h такое, что при выполнении неравенств (2) всякое решение системы (3), начинающееся внутри сферы $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$ при $t = \tau_0$, с возрастанием времени попадает и остается внутри ε-окрестности начала координат. Доказана теорема: если нулевое решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы уравнений (1) равномерно устойчиво в целом, то система (1) устойчива в целом по отношению к запаздываниям. *Н. П. Еругин*

729. Об одной теореме существования почти периодических решений некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Бирюк Г. И., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 1, 5—7

Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon F(t, x), \qquad (1)$$

где x — n-мерный вектор; A — постоянная n-мерная матрица, характеристическое уравнение которой

$$\mathrm{Det} \parallel \lambda E - A \parallel = 0 \qquad (2)$$

не имеет чисто мнимых корней; ε — малый параметр; функция $F(t, x)$ удовлетворяет условиям: а) для некоторой окрестности D точки $x = 0$ существует такая постоянная L, что для любых точек $x', x'' \in D$ и для всех $t \geqslant 0$

$$|F(t, x') - F(t, x'')| \leqslant L|x' - x''|;$$

б) $F(t, x)$ — почти периодическая функция переменного t равномерно по отношению к $x \in D$, так что для любого $\varepsilon_1 > 0$ можно найти такие функции $F_\gamma(x)$ и вещественные постоянные γ, что

$$|F(t, x) - \sum_\gamma e^{i\gamma t} F_\gamma(x)| \leqslant \varepsilon, \quad -\infty < t < \infty, \ x \in D.$$

Пусть D_σ обозначает область точек $x \in D$, для которых $|x| \leqslant \sigma$, $\sigma = \inf \rho(0, \bar{x})$, где $\bar{x}$ — точка на границе D.

Доказана теорема: Если корни λ уравнения (2) удовлетворяют условию $|\mathrm{Re}\,\lambda| > 0$, то можно указать такое $\varepsilon^*(\sigma) > 0$, что для любого $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ при выполнении условий а), б) система (1) имеет единственное почти периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, лежащее в области D_σ.

Без доказательства утверждается, что если все определители Гурвица, относящиеся к характеристическому уравнению (2), положительны, то любое другое решение $x^*(t, \varepsilon)$ системы (1) экспоненциально стремится при $t \to \infty$ к почти периодическому. В работе использованы некоторые оценки, полученные И. З. Штокало (Матем. сб., 1946, **19**, № 2, 280). *Н. П. Еругин*

730. О дифференцировании решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. Васильева А. Б., Вестн. Моск. ун-та, 1954, № 3, 29—40

Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений:

$$\mu \frac{dZ}{dt} = F(Z, Y, t), \qquad (1')$$

$$\frac{dY}{dt} = f(Z, Y, t) \qquad (1'')$$

и

$$F(z, y, t) = 0, \qquad (2')$$

$$\frac{dy}{dt} = f(z, y, t), \qquad (2'')$$

где $\boldsymbol{Y}$, y и f — m-мерные, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{F}$ — n-мерные вектора, а μ — малый параметр. При этом предполагается, что в некоторой конечной области D функции $f(\boldsymbol{z}, y, t)$ и $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}, y, t)$ непрерывны по всем переменным, и, что в этой области D имеются непрерывные изолированные решения $\boldsymbol{z} = \varphi(y, t)$ системы (2′). Референтом (Матем. сб., 1953, **32 (74)**, № 3, 533—544) и А. Н. Тихоновым (Матем. сб., 1952, **31 (73)**, № 3, 575—586) были доказаны теоремы, которые, применительно к последующему, можно объединить следующим образом. Пусть область $D^* \subset D$ содержит решения $y(t), \boldsymbol{z}(t) = \varphi(y(t), t)$ системы (2), и пусть для системы

$$\frac{d\boldsymbol{z}^*}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}^*, y, t) \qquad (3)$$

(y и t рассматриваются как параметры) все особые точки $\boldsymbol{z}^{**} = \varphi(y, t), y, t$, принадлежащие области D^*, асимптотически устойчивы (по Ляпунову). Обозначим через $D^{**} \subset D$ множество точек, обладающих тем свойством, что решение системы (3), соответствующее начальным значениям $\boldsymbol{z}^*(\tau; y, t)|_{\tau=0}$, стремится к $\boldsymbol{z}^{**} = \varphi(y, t)$, если только точка $(\boldsymbol{z}^{**}, y, t) \subset D^*$. Если при этих условиях начальные значения для системы (1): $\boldsymbol{Y}(0, \mu) = y(0)$, $\boldsymbol{Z}(0, \mu) = \boldsymbol{z}(0)$ определяют точку $(y(0), \boldsymbol{z}(0), 0) \subset D^{**}$, то имеют место ревенства

$$\lim_{\mu \to +0} \boldsymbol{Y}(t, \mu) = y(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

$$[(0, T) \subset D^*]$$

$$\lim_{\mu \to +0} \boldsymbol{Z}(t, \mu) = \boldsymbol{z}(t) \quad (0 < t \leqslant T).$$

Первые два члена разложения решения $\boldsymbol{Y}(t, \mu)$, $\boldsymbol{Z}(t, \mu)$ в ряд Маклорена (если таковое возможно) имеют вид

$$\boldsymbol{Y}(t, \mu) = y(t) + \left\{\frac{\partial \boldsymbol{Y}(t, \mu)}{\partial \mu}\right\}_{\mu \to 0} \mu + \ldots,$$

$$\boldsymbol{Z}(t, \mu) = \boldsymbol{z}(t) + \left\{\frac{\partial \boldsymbol{Z}(t, \mu)}{\partial \mu}\right\}_{\mu \to 0} \mu + \ldots$$

Предыдущая работа Васильевой (Матем. сб., 1952, **31(73)**, №3, 587—644) была посвящена доказательству существования пределов

$$\eta = \frac{\partial \boldsymbol{Y}(t, \mu)}{\partial \mu}, \ \zeta = \frac{\partial \boldsymbol{Z}(t, \mu)}{\partial \mu} \text{ при } \mu \to +0$$

и вычислению их; установлено, что эти пределы являются решениями системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{\boldsymbol{F}}}{\partial z_i} \zeta_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \overline{\boldsymbol{F}}}{\partial y_i} \eta_i + \frac{d\overline{\varphi}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{f}}{\partial z_i} \zeta_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \overline{f}}{\partial y_i} \eta_i,$$

где черточки над производными $\frac{\partial \overline{\boldsymbol{F}}}{\partial z_i}$, $\frac{\partial \overline{\boldsymbol{F}}}{\partial y_i}$, $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z_i}$, $\frac{\partial \overline{f}}{\partial y_i}$ означают, что эти производные берутся в точках интегральной кривой $y = y(t)$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t)$ при начальных значениях

$$\eta(0) = \int_0^\infty [f(\boldsymbol{z}(\tau), y(0), 0) - f(\varphi(y(0), 0, y(0), 0)] \, d\tau,$$

где $\boldsymbol{z}(\tau)$ представляет собою решение системы (3). Автор доказала эту теорему в предположении, что асимптотическая устойчивость системы (3) устанавливается прямым методом Ляпунова, при помощи функции Ляпунова, которая равна сумме квадратов (условия, указанные первоначально А. Н. Тихоновым: Матем. сб., 1950, **27(69)**, № 1, 147—156). Кроме того, предполагалось, что функции $\boldsymbol{F}$ обладают непрерывными частными производными первого и второго порядков, а функции f — непрерывными частными производными первого порядка, и что якобиан $\left|\frac{\partial F_j}{\partial z_k}\right| \neq 0$, когда $y, \boldsymbol{z}, t \subset D^*$.

В реферируемой работе полученные результаты распространяются на случай, когда асимптотическая устойчивость системы (3) определяется по методу первых приближений, т. е. тем, что действительные части всех корней λ_i уравнения

$$\operatorname{Det}\left\|\frac{\partial F_j}{\partial z_k} - \delta_{jk}\lambda\right\| = 0, \qquad (4)$$

где производные взяты в точках области D^*, отрицательны (условия, указанные в работе референта: Докл. АН СССР, 1949, **65**, № 6,789—792) Требования на функции $\boldsymbol{F}$ и f остаются прежними.

Аналогичное ослабление условий теоремы дается и для случая, когда производные по параметру μ берутся от решений, системы, у которой множителями при производных служат величины различного порядка малости. Как вычисления, так и формулировка результатов в этой части работы очень громоздки.

Примечание референта Производные в характеристическом уравнении (4) достаточно рассматривать только в точках интегральной кривой $y = y(t)$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t)$ системы (2). *И. С. Градштейн*

731. Потоки Степанова на торе. Октоби (Stepanoff flows on the torus. Oxtoby John C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 982—987 (англ.)

Пусть Ω — тор с обычными координатами x, y. Потоком Степанова автор называет всякую непрерывную однопараметрическую группу преобразований T_t ($-\infty < t < \infty$) тора Ω, все траектории которой расположены на кривых $y - \alpha x = \text{const}$, где α — фиксированное иррациональное число, и которая имеет единственную неподвижную точку. Из этого определения следует, что указанные кривые, за исключением одной, сами служат траекториями; исключительная кривая проходит через неподвижную точку и состоит из трех траекторий. Оказывается, что для потока Степанова с неподвижной точкой P_0 имеются лишь две возможности:

(A) Единственная инвариантная нормированная мера Бореля есть тривиальная мера μ_0, для которой $\mu_0(P_0) = 1$. Для всякой непрерывной на Ω функции $f(P)$, равномерно относительно $P \in \Omega$,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(T_\tau P) \, d\tau = f(P_0).$$

(B) Существует единственная эргодическая нормированная мера Бореля, отличная от μ_0. Это единственная инвариантная мера Бореля μ, для которой

$\mu(\Omega)=1$ и $\mu(P_0)=0$. Всякая конечная инвариантная мера Бореля есть линейная комбинация мер μ_0 и μ. Квазирегулярные точки образуют в Ω множество первой категории.

Для построения примеров автор пользуется одной конструкцией Степанова (Compositio math., 1936, 3, 239—253).

Замечая, что все доставляемые этой конструкцией аналитические потоки принадлежат к типу (A), автор строит с ее помощью элементарный пример потока типа (B), не являющегося аналитическим, но топологически эквивалентного аналитическому потоку; нетривиальной эргодической мерой для этого аналитического потока служит площадь.

Замеченная неточность: на стр. 982 ошибочно утверждается, что

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy}{X(x,y)}=\infty \qquad (1)$$

для всякой неотрицательной функции X класса C^1 с единственным нулем на Ω (равенство (1) действительно справедливо, если $X\in C^2$). *В. А. Рохлин*

732. Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории. **Мышкис А. Д.**, Матем. сб., 1954, 34(76), № 3, 525—540

Используя теоремы о неподвижной точке при непрерывных отображениях, автор переносит известную теорему Бендиксона о существовании точки покоя внутри замкнутой траектории на случай n-мерного пространства и на динамические системы без единственности.

На n-мерном кривом (компактном) полиэдре P рассматривается односторонняя динамическая система, т. е. функция

$$f(A,t)\in P\quad (A\in P,\ 0\leqslant t<\infty),$$

непрерывная по совокупности аргументов и удовлетворяющая условиям $f(A,0)=A$, $f(A,t_1+t_2)=f(f(A,t_1),t_2)$ $(A\in P,\ 0<t_1,\ t_2<\infty)$. Доказана теорема:

Пусть $\chi(P)$ — эйлерова характеристика полиэдра P — отлична от нуля. Тогда данная динамическая система имеет по крайней мере одну точку покоя, т. е. такую точку $A_0\in P$, что $f(A_0,t)\equiv A_0$ $(0\leqslant t<\infty)$.

В качестве следствия автор непосредственно получает следующую теорему о существовании особой точки у системы дифференциальных уравнений:

Пусть в области G m-мерного евклидова пространства задана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\ldots,x_m)\quad (i=1,2,\ldots,m),$$

причем правые части непрерывны в G и обеспечивают единственность решения задачи Коши. Пусть далее задан (кривой) полиэдр $P\subset G$ с отличной от нуля эйлеровой характеристикой, обладающий тем свойством, что каждая траектория, начинающаяся на теоретико-множественной границе P, при $t>0$ остается на P. Тогда система имеет на P по крайней мере одну особую точку.

Далее автор рассматривает на полиэдре P одностороннюю динамическую систему без единственности, т. е. многозначную непрерывную функцию $f(A,t)\in P$, для которой $f(A,0)=\{A\}$, $f(A,t_1+t_2)\supseteq f(f(A,t_1)t_2)$ $(0<t_1,\ t_2<\infty)$. Если $A\in f(A,t)$ при всех $0\leqslant t<\infty$, то A называется точкой покоя.

Получены следующие результаты:

Для существования точки покоя необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлись $A\in P$ и число δ $(0<\delta<\varepsilon)$ такие, что $A\in f(A,\delta)$.

Пусть полиэдр P одномерен, причем $\chi(P)\neq 0$ и для некоторых $t_1>t_2>\ldots>0$ все множества $f(A,t_i)$ связны; тогда система f имеет по крайней мере одну точку покоя.

Пусть дан двумерный полиэдр P, для которого $\chi(P)\neq 0$, причем P остается замкнутым после выбрасывания из него любого подмножества, гомеоморфного открытому кругу. Если для некогорых $t_1>t_2>\ldots>0$ все множества $f(A,t_i)$ и $P\setminus f(A,t_i)$ $(A\in P)$ связны, то динамическая система f имеет точку покоя. *Е. А. Барбашин*

733. Уравнения нелинейных колебаний — аналитические результаты. **Сансоне** (Le equazioni delle oscillazioni non lineari-risultati analitici. Sansone Giovanni), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 1, 186—217 (итал.)

Дан обзор ряда аналитических методов исследования нелинейных колебательных систем. Приводятся типичные нелинейные уравнения, описывающие колебательные процессы: уравнение Дюфинга, Трикоми, Ван-дер-Поля и др.

Излагается метод Льенара для уравнения

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+\left[r-\psi(i)\right]\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0.$$

Подробно изложен метод Крылова-Боголюбова применительно к уравнению вида

$$\ddot{x}+\omega^2x+\mu f(x,\dot{x})=0,$$

где μ — малый параметр. Приведено решение этого уравнения в первом приближении

$$x=\rho\sin\psi,$$

где ρ и ψ определяются уравнениями

$$\dot{\rho}=-\frac{\mu}{\omega}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho\sin\varphi,\ \rho\omega\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$\dot{\psi}=\omega+\frac{\mu}{\rho\omega}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho\sin\varphi,\ \rho\omega\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

Метод Крылова—Боголюбова иллюстрируется на примере уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x}+x-\mu(1-x^2)\dot{x}=0.$$

Для случая не малых μ излагается стробоскопический метод Минорского для уравнения

$$\ddot{x}=F(x,\dot{x},t),$$

где F — функция, периодическая по t с периодом 2π. Согласно этому методу исследование по-

следнего уравнения сводится к рассмотрению системы

$$\frac{d\rho}{dt} = f_1(\rho, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = f_2(\rho, \varphi),$$

где $\rho = x^2 + \dot{x}^2$. Так, например, в случае нелинейного уравнения Матье

$$\ddot{x} + [1 + \varepsilon(A - Cx^2)\cos 2t]\, x = 0$$

получаем систему

$$\dot{\rho} = \frac{1}{4}\rho(C\rho - 2A)\sin 2\varphi,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{4}(C\rho - A)\cos 2\varphi.$$

Приведены теоремы Левинсона о периодических решениях уравнения

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = e(t),$$

а также обобщение этих теорем Левинсоном и Лангенхопом на случай уравнения

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t).$$

Изложена теорема Мари, Л. Картрайта и Ю. Е. Литтлвуда и теорема Левинсона о случае воздействия квазипериодической возмущающей силы. Приведены также результаты, полученные Сансоне, Америо, Каччопполи-Гиззети и др. как для одного нелинейного уравнения, так и для систем нелинейных уравнений, описывающих колебательный процесс. Статья содержит обширные библиографические ссылки. *Ю. А. Митропольский*

734. О некоторых свойствах решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Гусаров Л. А., Уч. зап. МГУ, сер. матем., 1954, **7**, № 165, 223—237

Выводятся оценки порядка роста решений уравнения

$$y'' + p(x)\, y = 0, \tag{1}$$

из которых получаются затем достаточные условия ограниченности решений и стремления их к нулю при $x \to \infty$.

Типичный результат: пусть в уравнении (1) для $x \geqslant x_0$: 1) $p(x) \geqslant a^2 > 0$, 2) $p'(x)$ непрерывна. Пусть $y(x)$ — решение с начальными условиями $y(x_1) = 0$, $y'(x_1) \neq 0$, где $x_1 \geqslant x_0$ и $p'(x)$ имеет нули при $x \geqslant x_1$. Тогда

$$[y(x)]^2 \leqslant \frac{A}{b}\left[\exp\frac{3\pi}{2a^3}\, V_{x_1}^{x}\, p'(x)\right] \times$$

$$\times\left(K + \frac{\pi L_1}{a^3}\right)^{\frac{\pi}{a^3}\frac{K^{3/2}}{K^{3/2}-1}\, V_{x_1}^{x} p'(x)} \left(1 + \frac{\pi}{a^3} L_1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Значение констант указывается. Аналогичные оценки даются для производной и для случаев $p'(x) > 0$ (< 0) при $x \geqslant x_1$.

Как следствие отсюда вытекает: если в уравнении (1) $p(x)$ удовлетворяет условиям 1) и 2), а $p'(x)$ ограниченной вариации для $x \geqslant x_0$, то все решения ограничены при $x \geqslant x_0$. Если, кроме того, $p(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то все решения стремятся к нулю при $x \to \infty$.

Предложенные оценки и условия ограниченности решений эффективны для функций $p(x)$, в определенном смысле близких к линейной функции $p(x) = kx + b$. *В. А. Якубович*

735. Ограниченность решений некоторого нелинейного дифференциального уравнения. Там Цой-так (The boundedness of the solutions of a nonlinear differential equation. Taam Choy-Tak), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 122—125 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$(r(x)\, y')' + q(x)\, y = f(x, y), \tag{1}$$

где функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant g(x)\,|y_1 - y_2|,$$

$$\int_0^\infty |g(x)|\, dx < \infty, \quad \int_0^\infty |f(x, 0)|\, dx < \infty,$$

функции $1/r(x)$, $q(x)$ и $f(x, y)$ (при любом фиксированном y) интеггрируемы на любом конечном интервале $0 \leqslant x \leqslant R$. Обозначим $\min[u'(x), 0] = (u(x))'$.

Доказывается теорема:

Если существует интегрируемая функция $p(x)$ такая, что 1) $rp \geqslant 0$ и абсолютно непрерывна при $0 \leqslant x < \infty$,

$$2) \qquad \int_0^\infty |p - q|\, dx < \infty, \quad \int_0^\infty |(rp)'/rp|\, dx < \infty,$$

то каждое решение уравнения (1) ограничено при $x \to \infty$.

Здесь все функции предполагаются действительными. Аналогичная теорема доказывается для случая комплексных функций. *В. А. Якубович*

736. Критерии устойчивости движения точки под действием силы упругости при сопротивлении и возмущающей силе. Сестини (Criteri di stabilità per il moto di un punto soggetto a forza elastica, a resistenza e ad una forza disturbatrice. Sestini Giorgio), Atti IV congr. Unione mat. ital, 1953, **2**, 559—564 (итал.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{y} + \omega^2 y + \varphi(\dot{y}) = f(t), \tag{1}$$

где ω — постоянная, функция $\varphi(\dot{y})$ определена и непрерывна на интервале $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условию $\dot{y}\varphi(\dot{y}) \geqslant 0$. Если функция $f(t)$ такова, что

$$\int_{t_0}^\infty |f(t)|\, dt < c, \tag{2}$$

где c — постоянная, то решение $y = y(t)$ уравнения (1) ограничено на интервале (t_0, ∞). Для доказательства рассматривается величина $E(t) = \dot{y}^2(t) + \omega^2 y^2(t)$ и вычисляется ее изменение на отрезке (t_0, t); при условии (2) для любого $t > t_0$ это изменение по модулю меньше некоторой постоянной, откуда и следует справедливость утверждения.

Пусть функция $\varphi(\dot{y})$ имеет вид

$$\varphi(\dot{y}) = 2\varepsilon\dot{y} + R(\dot{y}), \qquad (3)$$

где ε — положительная постоянная, $R(\dot{y})\,\dot{y} \geqslant 0$ и

$$|R(z_2) - R(z_1)| \leqslant L\,|z_2 - z_1|^a, \qquad (4)$$

причем $a < 1$. Тогда, если одно из решений уравнения (1) определено и ограничено на интервале (t_0, ∞), то и все решения (1) ограничены на интервале (t_0, ∞). Это утверждение является следствием доказанной в заметке теоремы о том, что разность двух решений (1), определенных на интервале (t_0, ∞) при условиях (3) и (4), ограничена на этом интервале. Применяя метод функций Ляпунова, можно было бы легко получить обобщение этих результатов. *Н. Н. Красовский*

737. Исследование уравнения $\ddot{x} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x)\dot{x} + x + \varepsilon_3 x^2 = 0$. **Оби** (Researches on the equation (E) $\ddot{x} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x)\dot{x} + x + \varepsilon_3 x^2 = 0$. Obi Chike), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, ч. 1, 26—32 (англ.)

Исследуется вопрос о существовании периодического решения указанного в заглавии уравнения в предположении, что отношение $\varepsilon_2/\varepsilon_3$, обозначаемое автором через $^2/_3\varepsilon$, мало. Уравнение приводится к виду

$$\ddot{x} + (k + \varepsilon x)\dot{x} + x + \frac{3}{2}x^2 = 0;$$

показывается, что для того чтобы у него существовало периодическое решение, необходимо, чтобы выполнялось условие $0 < k/\varepsilon \leqslant 2/21$. При $0 < k/\varepsilon < 2/21$ существует единственное (с точностью до произвольной начальной фазы) периодическое решение, которое аналитически зависит от ε. Аналитическим относительно ε будет также и период этого решения.

Устанавливаются приближенные формулы для периода и пределов, в которых изменяется величина x в периодическом решении. *И. Г. Малкин*

738. Об одной частной квазилинейной системе с двумя степенями свободы. **Коломбо** (Sopra un particolare sistema quasi-lineare in due gradi di libertà. Colombo Giuseppe), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 484—485 (итал.)

Сообщается без доказательств, со ссылкой на подробную работу автора (Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1952, 21, 58—92), о некоторых результатах, относящихся к существованию, устойчивости и приближенному нахождению периодических решений одной нелинейной системы частного вида, близкой к линейной. В заметке имеются опечатки. *А. В. Драгилев*

739. О нелинейных системах с двумя степенями свободы. **Минорский** (Sur les systèmes non linéaires à deux degrés de liberté. Minorsky Nicolas), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 6, 646—647 (франц.)

Приводятся некоторые высказывания о периодических решениях системы

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = (a - bx_1^2)\dot{x}_1 + \varepsilon Q_1 x_2,$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = (a - bx_2^2)\dot{x}_2 + \varepsilon Q_2 x_1$$

(здесь a, b, ε малы, ω_1 и ω_2 близки к единице). Рассматриваются особые точки системы четырех (в частном случае—трех) дифференциальных уравнений первого порядка, которая получается из данной системы с помощью стробоскопического преобразования. *А. В. Драгилев*

740. Об одном обобщении принципа усреднения Н. Н. Боголюбова. **Демидович Б. П.**, Докл. АН СССР, 1954, 96, № 4, 693—694

Для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \varepsilon),$$

где x и $f(t, x, \varepsilon)$ — одноколонные матрицы, формулируется следующая теорема:

Пусть матрица $f(t, x, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(t, x, \varepsilon)$ комплекснозначна, определена и непрерывна по совокупности переменных t, x и ε в области: $0 \leqslant t < +\infty$, $x \in D$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где D — некоторая область n-мерного пространства и $\varepsilon_0 > 0$;

2) в каждой компактной части σ области изменения переменных t и x равномерно по ε имеет место неравенство

$$\| f(t, x, \varepsilon) \| \leqslant M(\sigma)$$

(под нормой матрицы $A = (a_{lk})$ понимается $\| A \| = \sum_{j,k} |a_{jk}|$);

3) выполнено условие Липшица

$$\| f(t, \tilde{x}, \varepsilon) - f(t, x, \varepsilon) \| \leqslant L(\sigma) \| \tilde{x} - x \|;$$

4) существует предельное среднее значение

$$\bar{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, \varepsilon)\, dt,$$

не зависящее от выбора числа T $(0 < T < +\infty)$ равномерно по x на любом компактном множестве $D_0 \subset D$.

Тогда для всякого решения $x = x(t, \varepsilon)$ первоначальной системы, для которого $\lim_{\varepsilon \to 0} x(t_0, \varepsilon) = x_0 \in D$, справедливо соотношение $\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t)$, где $\bar{x} = \bar{x}(t)$ — решение усредненной системы

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}),$$

удовлетворяющее условию $\bar{x}(0) = x_0$. Предельное соотношение выполнено равномерно на каждом конечном отрезке $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, целиком принадлежащем интервалу определения предельного решения.

Указывается, что доказательство может быть проведено методом последовательных приближений.

Теорема является обобщением относящихся к данному вопросу результатов Фату (Fatou M. P., Bull. Soc. math. France, 1928, 56, 98—139) и Н. Н. Боголюбова (О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, 1945). *А. Ф. Андреев*

741. Приближенный метод исследования квазигармонических колебаний. Леонов М. Я., Науч. зап. Ин-та машиновед. и автоматики АН УССР, 1953, **2**, № 1, 5—8

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$G(t)\ddot{z} + [\dot{G}(t) + 2\nu(t)]\dot{z} + D(t)\,z = Q(t),$$

где G, ν, D, Q — известные функции времени, причем $D > 0$, $G > 0$ (к этому уравнению сводится задача о малых колебаниях системы с одной степенью свободы около заданного состояния движения).

После введения новой независимой переменной

$$\theta = \int_0^t \sqrt{\frac{D}{G}}\,dt$$

уравнение принимает вид

$$z'' + 2\gamma(\theta)\,z' + z = S(\theta).$$

Соответствующее ему однородное уравнение

$$x'' + 2\gamma(\theta)\,x' + x = 0$$

путем подстановки $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{x'}$ преобразуется к следующему:

$$\varphi' = 1 + \gamma\sin 2\varphi.$$

Как показано в предыдущей работе автора (Докл. АН УССР, 1948, № 3,51—57), при известном частном решении φ^* общий интеграл однородного уравнения записывается в виде

$$x = \exp\left(-\int\gamma\,d\theta\right)\left[Av\sin\varphi^* + \frac{B}{v}(\dot{F}\sin\varphi^* + \cos\varphi^*)\right],$$

где

$$v(\theta) = \exp\left(-\int_0^\theta \gamma\cos^2\varphi^*\,d\theta\right),$$

$$F(\theta) = 2v^2\int_0^\theta \gamma v^{-2}\sin 2\varphi^*\,d\theta$$

(A и B — постоянные).

Далее развивается метод приближенного определения функций φ^*, v и F. *Ю. А. Митропольский*

742. О решениях линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Там Цой-так (On the solutions of second order linear differential equations. Taam Choy-Tak), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 876—879 (англ.)

Исследуется дифференциальное уравнение

$$(P(x)W')' + Q(x)W = 0,\quad 0 \leqslant x < \infty, \qquad (1)$$

где $P(x) = p_1(x) + ip_2(x)$ и $Q(x) = q_1(x) + iq_2(x)$ — заданные комплекснозначные функции, $1/P(x)$, $Q(x)$ интегрируемы по Лебегу на $[0, R]$ при любом конечном R. Показано, что любое нетривиальное решение дифференциального уравнения (1) имеет не более одного нуля на данном интервале I правой полуоси x, если существуют вещественные константы j и k и вещественная функция $m(x)$, абсолютно непрерывная на любом замкнутом подинтервале I, для которых выполняются условия:

а) функция $jp_1 + kp_2$ положительна на I, функция $1/(jp_1 + kp_2)$ суммируема на любом замкнутом подинтервале I,

б) $m' + \dfrac{m^2}{jp_1 + kp_2} \leqslant -(jq_1 + kq_2)$ почти везде на I.

Сформулированы две теоремы сравнения, непосредственно вытекающие из доказанного утверждения и ранее полученных автором результатов (Duke Math. J., 1952, 19, 493—497). *И. М. Рапопорт*

743. Об одном общем классе нелинейных краевых задач для систем из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Конти (Su una classe generale di problemi ai limiti non lineari per i sistemi di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Conti Roberto), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 1, 181—191 (итал.)

Рассматривается система уравнений $y' = f(x, y, z)$, $z' = g(x, y, z)$ ($x \geqslant x_0$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$), где функции f и g удовлетворяют условиям типа Каратеодори, и кроме того, заданы значение y_0 и непрерывная кривая $y = Y(x)$, $z = Z(x)$ ($x > x_0$). Ищется решение этой системы, существующее на некотором отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant \xi^*$ (ξ^* не дано) при дополнительных условиях $y(x_0) = y_0$, $y(\xi^*) = Y(\xi^*)$, $z(\xi^*) = Z(\xi^*)$. Доказано существование такого решения, если выполнены некоторые неравенства, смысл которых сводится к тому, что для некоторых $\xi_1 > x_0$ и $\xi_2 > x_0$ все решения, определяемые начальным условием $y(\xi_i) = Y(\xi_i)$, $z(\xi_i) = Z(\xi_i)$, удовлетворяют неравенствам $y(x_0) < y_0$ (при $i = 1$) и $y(x) > y_0$ (при $i = 2$). При доказательстве строятся приближенные решения, а затем используется известный принцип компактности семейства непрерывных функций. Приведен ряд простых следствий. Имеется обзор работ по аналогичным задачам.

Примечание референта. Теорема может быть доказана значительно проще в более общем виде, если рассмотреть изменение интегральной воронки, определяемой начальным условием $y(\xi) = Y(\xi)$, $z(\xi) = Z(\xi)$, при переменном ξ. В формулировке теоремы требование абсолютной непрерывности функций Y и Z излишнее; надо предполагать, что $\xi_1 > x_0$, $\xi_2 > x_0$, $s_1(x) \geqslant 0$; в условиях (7) и (7′) должно быть $s_1(x)$ вместо $s_2(x)$. При построении приближенного решения в повторном интеграле верхний предел внутреннего интеграла надо заменить на t (во всей статье). При оценке на стр. 189 в правой части не учтено слагаемое $|Y(\xi_\mu) - Y(\xi^*)|$. В формулировке следствия 1 в правых частях неравенств надо переставить ξ_1 и ξ_2. В последнем примере на стр. 191 должно быть $1/x$ вместо $1/z$. *А. Д. Мышкис*

744. О поведении собственных функций. Шноль И. Э., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 3, 389—392

Рассматривается дифференциальная система

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda y \quad (0 \leqslant x < \infty), \qquad (1)$$

$$\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \qquad (2)$$

$q(x)$, α, β действительны. Через $\rho(\lambda)$ обозначим спектральную функцию системы (1) — (2), через

S — ее спектр, т. е. множество, дополнительное к интервалам постоянства функции $\rho(\lambda)$, и через $\varphi(x,\lambda)$ — решение (1) — (2) при условии $\varphi(0,\lambda)=1$. В работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. $|\varphi(x,\lambda)|<C(\lambda,\varepsilon)\,x^{1/2+\varepsilon}$ при условии $q(x)>C$ для любого $\varepsilon>0$ и почти всех $\lambda\in S$ по мере $\rho(\lambda)$

Теорема 2. Пусть $\varphi(x,\lambda)$ есть решение уравнения (1) и пусть для этого решения найдется последовательность чисел $A_n\to\infty$ такая, что

$$\int_{A_n}^{A_n+3}\varphi^2(x,\lambda)\,dx=o\left(\int_0^{A_n}\varphi^2(x,\lambda)\,dx\right).$$

В таком случае $\lambda\in S$.

Теорема 3. Пусть $q(x)>C$. Тогда точки λ, соответствующие решениям уравнения (1), растущим не быстрее степени x, образуют множество точек спектра полной меры по $\rho(\lambda)$. *Б. М. Левитан*

745. Заметка о критерии предельной точки. Патнам (Note on a limit-point criterion. Putnam C. R.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, ч. 1, № 113, 126—128 (англ.)

Пусть $x(t,\lambda)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right)+(\lambda-f(t))\,x=0,\quad 0\leqslant t<\infty,\qquad(1)$$

с фиксированными начальными условиями

$$x=-\sin\alpha,\quad p\frac{dx}{dt}=\cos\alpha\ \text{при}\ t=0,$$

где $p(t)$ и $f(t)$ — вещественные функции, непрерывные при $0\leqslant t<\infty$, $p(t)>0$, λ — вещественный параметр, $0\leqslant\alpha<\pi$. По определению Вейля, уравнение (1) имеет тип предельного круга или тип предельной точки, если для некоторого (а следовательно, для каждого) значения λ будет или соответственно не будет существовать двух линейно независимых решений из класса $L^2[0,\infty]$. Показано, что дифференциальное уравнение (1) будет типа предельной точки тогда и только тогда, когда хотя бы одна из функций $x(t,\lambda)$ и $\frac{\partial x(t,\lambda)}{\partial\lambda}$ не принадлежит к классу $L^2[0,\infty]$. *И. М. Рапопорт*

746. Об одном классе «вспомогательных функций», относящихся к дифференциальным уравнениям 2-го порядка. Ричард (Su una classe di «funzioni ausiliarie» riguardanti le equazioni differenziali del 2° ordine. Richard Ubaldo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 200—203 (итал.)

Для изучения поведения решений дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)\,y(x)=0,\qquad(1)$$

где $p(x)$, $q(x)$ — действительные функции, удовлетворяющие известным ограничениям, автор предлагает рассматривать квадратичную форму

$$\varphi(x)=A(x)\,y^2+2B(x)\,pyy'+C(x)\,p^2y'^2,\qquad(2)$$

производная которой, в силу уравнения (1), имеет вид:

$$\varphi'(x)=(A'-2qB)\,y^2+2(A-pqC+pB')\,yy'+(2pB+p^2C')\,y'^2.$$

Выбирая коэффициенты A, B, C надлежащим образом, отсюда можно получить ряд критериев, относящихся к поведению решений уравнения (1).

В частности, пусть x_k—последовательность стационарных точек решения $y(x)$. Полагая $A=1$, $B=0$, $C=1/pq$, получаем $\varphi'(x)=(1/pq)'p^2y'^2$. Отсюда имеем теорему Сонина и Полиа: если произведение pq монотонно, то последовательность $|y(x_k)|$ изменяется также монотонно в противоположном направлении. Эта теорема была обобщена в работе автора (Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1950, 9, 309 — 324). Приводится также следующий новый результат: если функция

$$\omega=\frac{p}{2}\,[(pq)^{-1/2}]'$$

изменяется монотонно и $\lim\limits_{x\to+\infty}\omega=0$, то последовательности

$$[1\pm\omega(x_k)]^{-\frac{1}{2}}[p(x_k)\,q(x_k)]^{\frac{1}{4}}\,|y(x_k)|$$

изменяются монотонно вместе с pq в обратном или том же направлении соответственно. Для доказательства достаточно положить:

$$A=\frac{(pq)^{\frac{1}{2}}}{1\pm\omega},\quad B=\mp1\pm\frac{1}{1\pm\omega},\quad C=\frac{(pq)^{-\frac{1}{2}}}{1\pm\omega}.$$

Указывается, что в некоторых случаях, при помощи обобщенной функции $\varphi(x)$, можно исследовать также поведение решений нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)\,y^n(x)=0,$$

где n — положительное число (Richard U., Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1951, **10**, 305—324). *Б. П. Демидович*

747. Заметка о краевой задаче. Фуруя (Note on a boundary value problem. Furuya Shigeru), Comment. math. Univ. St. Paul, 1953, **1**, 81—83

Вейль (Weyl H., Ann. Math., 1943, **43**, 381—407) доказал существование решения задачи:

$$w'''+2ww''+3\lambda(k^2-w'^2)=0\ \text{для}\ z\geqslant0;$$

$$w(0)=w'(0)=0,\ w'(z)\to k\ \text{при}\ z\to\infty.$$

В настоящей статье показано, что решение единственно, если $0\leqslant\lambda\leqslant1$. Сначала в предположении, что $w''(z)>0$, в нескольких строках показывается единственность при помощи изучения преобразованной задачи, получаемой введением новых переменных $x=w(z)$ и $y=w'(z)$. Доказательство предположения $w''(z)>0$ требует отдельного рассмотрения для промежутков $0\leqslant\lambda\leqslant1/2$ и $1/2<\lambda<1$. *W. Wasow*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 1, 33.

748 Д. Об ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Доброхотова М. А., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, Москва, 1954

749 Д. Особые точки второй группы. Широв И. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Казань, 1953

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

750. Исследования систем линейных уравнений с частными производными типа Лапласа. Еликану (Cercetări asupra sistemelor de ecuaiţi lineare cu derivate parţiale de tip Laplace. Eliianu I. P.), Studii şi cercetări mat., 1953, 4, № 1—2, 155—196 (рум.; резюме русс., франц.)

В работе рассматривается система линейных уравнений с частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + A\frac{\partial Z}{\partial x} + B\frac{\partial Z}{\partial y} + CZ = 0, \qquad (1)$$

где $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — искомый вектор, а $A = \|a_\beta^\alpha\|$, $B = \|b_\beta^\alpha\|$, $C = \|c_\beta^\alpha\|$ — заданные квадратные матрицы n-го порядка, причем коэффициенты a_β^α, b_β^α, c_β^α — заданные непрерывные функции в определенной области D плоскости (x, y).

Автор вводит матричные инварианты H и K, которые в случае одного уравнения сводятся к известным инвариантам Дарбу. При $H = 0$, $K = 0$ система (1) приводится к системе первого порядка. Автор выводит необходимые и достаточные условия интегрируемости последней системы. Отдельно рассмотрен случай, когда $H \neq 0$, $K \neq 0$, и для этого случая исследуются задача Коши и задача Дарбу-Пикара для системы (1). *А. В. Бицадзе*

751. Применение метода последовательных приближений к определению интеграла Дарбу и его обобщения в случае одного уравнения в частных производных первого порядка в форме, разрешенной относительно одной из производных. Жерме (Sur l'application de la méthode des approximations successives à la détermination de l'intégrale de Darboux et de sa généralisation dans le cas d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre de forme résolue. Germay R. H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège), 1953, 22, № 8—10, 359—367; 423—436 (франц.)

Показывается применение метода последовательных приближений Пикара к уравнению вида

$$p_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n) \qquad (1)$$

для получения его классического интеграла Дарбу, а также и обобщенного интеграла; причем в первом случае за вспомогательные параметры t_k выбираются $n-1$ начальных значений интегралов характеристической системы

$$t_1 = p_2^0, \ldots, t_{k-1} = p_k^0; \; t_k = x_{k+1}^0, \ldots, t_{n-1} = x_n^0; \qquad (2)$$

во втором случае между параметрами t_k и начальными значениями

$$x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$$

интегралов характеристической системы задаются $2n-1$ уравнений связи:

$$R_j(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}; \; x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, p_2^0, \ldots, p_n^0) = 0, \qquad (3)$$

$$j = 1, 2, \ldots, 2n-1.$$

Исходным пунктом является дифференциальная система характеристик, интегралы которой получаются по методу Пикара. Подробно описан процесс исключения введенных вспомогательных параметров.

Рассматривается также случай, когда функция f в правой части уравнения (1) представляет собой предел f_∞ равномерно сходящейся последовательности функций:

$$f_1, f_2, \ldots, f_\mu, \ldots$$

Это дает автору возможность распространить предложенный им метод также и на случай уравнения, не разрешенного относительно p_1:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0. \qquad (4)$$

В статье имеются ссылки на предыдущие работы автора (Bull. Soc., roy. sci Liège, 1953, 22, 264—275; C. r. Acad. sci., 1924, 178, 2225 и др.). *В. А. Яблоков*

752. О нахождении однородных решений уравнений в частных производных. Торколи (Su la determinazione delle soluzioni omogenee di equazioni alle derivate parziali. Torcoli Emilia), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, 4, № 3, 213—218 (итал.)

Рассматриваются условия, при которых уравнение

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

допускает решения, являющиеся однородными функциями x и y вида $z = x^\nu \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Для $\varphi(t)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\overline{F}(\nu, x, t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) = 0,$$

общее решение которого может быть записано в виде

$$\varphi(t) = \Phi(t, x, \nu, c_1, c_2),$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Для того чтобы исходное уравнение имело однородные решения порядка ν, $\Phi\left(\frac{y}{x}, x, \nu, c_1, c_2\right)$ как функция x и y должна быть однородной степени нуль. Исходное уравнение не будет иметь однородных решений, если ни для одного значения ν функция Φ не будет однородной функцией степени нуль. *С. Н. Киро*

753. О некоторых условиях применимости метода Фурье. Лопатинский Я. Б., Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, № 3, 85—92

Попытка обоснования метода Фурье в смешанной задачи для уравнения вида

$$Tu(x, t) = Xu(x, t) + F(x, t)$$

при граничном и начальных условиях вида

$$\xi u(x, t) = 0, \; \frac{\partial^\alpha u(x, 0)}{\partial t^\alpha} = \varphi_\alpha(x) \quad (\alpha = 0, \ldots, k-1),$$

где T, X и ξ означают некоторые линейные дифференциальные операторы. Однако не обосновано утверждение автора, что решение задачи рассматривается в классическом смысле. Именно, в работе отсутствует доказательство возможности почленного кратного дифференцирования ряда, полученного методом Фурье. *Н. А. Бразма*

754. О решениях дифференциального уравнения $rt - s^2 = 1$. Йёргенс (Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. Jörgens Konrad), Math. Ann., 1954, **127**, № 2, 130—134 (нем.)

Даются оценки для третьих производных решения уравнения $rt - s^2 = 1$ через вторые производные. Именно, если $z(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения $rt - s^2 = 1$ в круге с центром (x_0, y_0) и радиусом R, то для третьих производных в точке (x_0, y_0) имеет место оценка

$$(r_x^2 + r_{y_0}^2)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} < \frac{24}{R^2}(r+t)^2 r^2\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},$$

$$(t_x^2 + t_y^2)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} < \frac{24}{R^2}(r+t)^2 t^2\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

Доказывается аналитичность решения уравнения $rt - s^2 = 1$ в предположении двукратной дифференцируемости априори.

Доказывается, что всякое решение уравнения $rt - s^2 = 1$, регулярное во всей плоскости xy, есть многочлен второй степени.

Для последнего утверждения, очевидным образом вытекающего из первого, дается независимое доказательство. *А. В. Погорелов*

755. Однолистные решения линейных эллиптических систем. Берс (Univalent solutions of linear elliptic systems. Bers Lipman), Communs Pure and Appl. Math., 1953, **6**, № 4, 513—526 (англ.)

Рассматриваются решения следующей системы уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}\varphi_x &= A_{11}(x, y)\psi_x + A_{12}(x, y)\psi_y,\\ \varphi_y &= A_{21}(x, y)\psi_x + A_{22}(x, y)\psi_y.\end{aligned} \qquad (1)$$

Все величины в системе (1) действительные. Решения системы (1) рассматриваются в комплексной форме $\omega(z) = \varphi + i\psi$. Доказывается следующая основная теорема:

Если функции A_{ij} определены в области Ω, расположенной в плоскости переменной z $(z = x + iy)$, и удовлетворяют там условию эллиптичности системы $4A_{12}A_{21} + (A_{11} - A_{22})^2 < 0$, $A_{12} > 0$, то в этой области всегда существует решение $\omega(z) = \varphi + i\psi$ такое, что: 1) $\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x > 0$ всюду в Ω, 2) $\omega(z)$ осуществляет гомеоморфное отображение области Ω, 3) в заранее заданной точке $z_0 \in \Omega$ $\varphi = \psi = 0$, $\varphi_x = 1$, $\psi_y = 0$.

Относительно коэффициентов A_{ij} предполагается, что их первые производные существуют и удовлетворяют условию Гельдера внутри области Ω.

На границу области Ω, а также на поведение коэффициентов A_{ij} вблизи границы Ω никаких ограничений не накладывается. Это составляет главный интерес теоремы, так как в предположении достаточной гладкости границы Ω и достаточно гладкого поведения коэффициентов A_{ij} на этой границе известны более сильные теоремы, например, теоремы о квазиконформных отображениях, доказанные Лаврентьевым и Шапиро.

Автор высказывает предположение, что имеет место следующее усиление основной теоремы: существует такое однолистное решение $\omega(z)$ системы (1), что $\omega(\Omega)$ принадлежит к некоторому классу канонических областей.

Для доказательства рассматривается аппроксимирующая последовательность систем (1) некоторого частного типа, а именно систем, определенных на всей плоскости комплексного переменного z, и таких, которые вне некоторой последовательности кругов совпадают с системой Коши — Римана, а на возрастающей и исчерпывающей Ω последовательности замкнутых и ограниченных подмножеств Ω_n, $(\Omega_n \subset \Omega)$ совпадают с первоначальной системой.

Для этого частного случая выводится критерий однолистности решения в следующей форме: решение $\omega(z)$ однолистно тогда и только тогда, когда $\omega(z) \sim az$ для $z \to \infty$ и $a \neq 0$. Рассматривая некоторое интегральное уравнение типа Фредгольма (то же самое уравнение рассматривается с подобной целью в статье И. Н. Векуа (Матем. сб., 1952, **31** (73) № 2, 217—314; у автора ссылки нет); автор доказывает в этом частном случае существование решения, удовлетворяющего условиям основной теоремы.

Таким образом, получается семейство однолистных решений аппроксимирующих уравнений. Его компактность автор получает, используя известные ранее свойства квазиконформных отображений.

В двух последних параграфах работы дается применение полученного результата к квазилинейным уравнениям следующего типа:

$$A(p, q)r + 2B(p, q)s + C(p, q)t = 0, \qquad (2)$$

где

$$p = \varphi_x,\ q = \varphi_y,\ r = \varphi_{xx},\ s = \varphi_{xy},\ t = \varphi_{yy}.$$

Доказывается, что если A, B, C определены в области Ω, содержащей начало координат, их первые производные по p и q удовлетворяют внутри Ω условию Гельдера и выполнено условие эллиптичности $AC - B^2 > 0$, то существуют функции $\lambda(p, q)$ и $\mu(p, q)$ такие, что функция $k = \lambda + i\mu$ является непрерывно дифференцируемым гомеоморфизмом области Ω и уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial\lambda(p, q)}{\partial x} + \frac{\partial\mu(p, q)}{\partial y} = 0.$$

Б. В. Боярский

756. Задача кручения Сен-Венана с функцией напряжений в виде полинома третьей степени. Е Кай-юань (應力函數或扭曲函數爲三次多項式形式的扭轉問題。葉開沅), 物理學報(Ули сюэбао, Acta phys. sinica) 1953, **9**, № 4, 255—274 (кит.; резюме англ.)

Рассматривается задача кручения цилиндрического бруса, когда функция напряжений имеет вид

$$\Psi = \sum_{k=0}^{3} (C_k Z^k + \overline{C}_k \overline{Z}^k) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

где C_k — комплексные числа, $Z = x + iy$, $\overline{Z} = x - iy$.

Доказывается, что если кривая третьего порядка $\Psi = 0$ распадается на прямые, то поперечное сечение бруса — равносторонний треугольник, если она распадается на прямую и кривую второго порядка, то эта последняя является ветвью гиперболы.

Рассматриваются задачи кручения, когда поперечное сечение бруса ограничено линиями касательных напряжений одного из указанных выше сечений. Вычислены закручивающие моменты (они выражаются через эллиптические интегралы).

Наконец, решается задача кручения, когда поперечное сечение бруса ограничено кривой третьего порядка. *Г. Ф. Манджавидзе*

757. Общее решение задачи об определении давления под подошвой круглого в плане штампа без учета сил трения. Моссаковский В. И., Науч. зап. Ин-та машиновед. и автоматики АН УССР, 1953, **2**, № 1, 41—53

Общее решение контактной задачи в конечной форме автор получает, используя представление решения в форме ряда Фурье. Интегрированием по частям полученной формулы удается освободиться от требования дифференцируемости заданной функции, характеризующей осадку. Этим самым достигается освобождение от условия ограниченности давления под штампом, которое накладывалось на искомое решение в работе Л. А. Галина (Прикл. матем. и механика, 1946, **10**, № 4, 425—448). Таким образом, автор приходит к общему решению в форме, данной референтом.

Работа по существу представляет собой весьма полное решение задачи об обращении одного кратного интеграла теории ньютоновского потенциала, равносильной определению плотности простого слоя на круговом диске по потенциалу этого слоя, заданному на том же диске. *М. Я. Леонов*

758. Давление круглого штампа на упругое полупространство. Моссаковский В. И., Науч. зап. Ин-та машиновед. и автоматики АН УССР, 1953, **2**, № 1, 9—40

Дается общее решение в форме ряда Фурье задачи о давлении абсолютно жесткого тела (штампа) на упругое полупространство для случая, когда область контакта является кругом. Силами трения автор пренебрегает.

Задача решается сведением смешанной задачи теории потенциала для полупространства с круговой границей, на которой заданы краевые условия, к парным интегральным уравнениям. При этом автору удается существенно упростить и обобщить метод решения, примененный В. М. Абрамовым при решении частной задачи о давлении кругового штампа с плоским основанием при несимметричной осадке.

Предложенный автором метод решения в форме ряда Фурье имеет некоторое преимущество перед методом отыскания решения в конечной форме (Леонов М. Я., Прикл. матем. и механика, 1940, 4, № 5—6, 73—86; Бицадзе, РЖМат, 1954, 40116), так как квадратуры, через которые выражаются решения, вычисляются элементарно для широкого класса поверхностей штампа. *М. Я. Леонов*

759. Задача изгиба парой сил стержня, составленного из различных упругих материалов, со слабо изогнутой осью. Рухадзе А. К., Сообщ. АН ГрузССР, 1953, **14**, № 9, 525—532

Решается задача об изгибе бруса, составленного из различных упругих материалов. Нижний конец предполагается закрепленным, а верхний несет нагрузку, эквивалентную паре с моментом, лежащим в плоскости торца. Боковая поверхность свободна от напряжений.

Все вычисления проведены с точностью до k^2, где k — параметр, который входит в уравнение поверхности раздела и внешней поверхности бруса:

$$F_i\left(x + k\frac{z^2}{2},\ y\right) = 0,$$

причем начало координат выбирается в «обобщенном центре инерции» закрепленного основания, а оси $0x$ и $0y$ направлены по «обобщенным осям инерции» этого основания. Величина изогнутости оси бруса характеризуется параметром k. Вводится система новых координат (Риз П. М., Докл. АН СССР, 1939, **24**, № 2, 3)

$$\xi = x + k\frac{z^2}{2}, \quad \eta = y, \quad \zeta = z.$$

Смещения и напряжения для каждого материала представлены в виде суммы трех слагаемых, из которых первые два берутся в том виде, как это дано в аналогичном случае Н. И Мусхелишвили (Некоторые основные задачи математической теории упругости, М.— Л., 1949), а для третьего слагаемого автор дает представление напряжений через функцию кручения и две новые неизвестные функции $\omega(\xi, \eta)$ и $\Phi(\xi, \eta)$, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\mu_i \Delta\omega = g_i, \quad \Delta\Delta\Phi = G_i,$$

где g_i и G_i — вполне определенные функции, зависящие от упругих свойств соответствующего материала и объемного расширения вспомогательной задачи.

Дается явное представление смещений через функции ω и Φ. Затем автор проверяет выполнимость граничных условий. Оказывается, что все граничные условия, за исключением условий на верхнем торце, выполнены. Для того чтобы выполнить граничные условия и на верхнем торце, автор предлагает добавить к изложенным подстановкам две новые, соответствующие задаче о растяжении и задаче об изгибе. *И. С. Аржаных*

760. Об одном классе гибких двухсрезных поверхностей вращения и напряжениях в них. Бузин Е. И., Изв. Изв. АН УзССР, 1953, № 6, 65—74

Рассматривается осесимметричная безмоментная оболочка вращения. Принимается, что она загружена поверхностной нагрузкой и меридиональными силами на двух краях, идущих вдоль параллели. Свобода смещений оболочки ничем не стеснена.

Ясно, что равновесие возможно тогда и только тогда, когда поверхностная и краевые нагрузки в совокупности уравновешены.

Автор стремится найти форму поверхности вращения, при которой равновесие станет возможным.

Задача бессодержательна, так как возможность равновесия зависит не от формы поверхности, а от вида загружения. Тем не менее в статье выявляется класс искомых поверхностей. Это произошло вследствие того, что автор делает в процессе выкладок частное предположение о законе изменения нормального усилия вдоль меридиана (формула (5) статьи). Цель постановки данной задачи остается неясной. *А. Л. Гольденвейзер*

761. Применение операционных методов к решению задачи о продвижении водо-нефтяного контакта при одноразмерном течении в упругом полубесконечном пласте. Пудовкин М. А., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, **113**, № 10, 139—154

При помощи преобразования Лапласа решается фильтрационная задача, указанная в названии статьи, которая сводится к решению системы уравнений

$$a_1^2 \frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} \quad (x \leqslant x_0),$$

$$a_2^2 \frac{\partial^2 p_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial t} \quad (x_0 \leqslant x)$$

при условиях $p_1(x,0) = p_0$, $p_2(x,0) = p_0$,

$$p_1(0,t) = p_1, \quad p_2(\infty,t) = p_0$$

при $x = x_0$, $p_1(x,t) = p_2(x,t)$,

$$c_1 \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} = c_2 \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x}.$$

Здесь a_1, a_2, c_1, c_2, p_0, p_1—не зависящие от x и t величины; x_0—некоторая функция времени, определяющая текущее положение границы «вода—нефть», по условиям задачи.

Решение ошибочное, т. к. неправильно используются условия на границе «вода — нефть». *В. П. Пилатовский*

762. Функция тока и потенциальная функция вектора скорости. Нейлор (The stream function and the velocity potential function. Naylor V. D.), Math. Gaz., 1954, 38, № 323, 30—34 (англ.)

По аналогии с плоским потоком несжимаемой жидкости рассматриваются общие свойства функции тока и потенциальной функции, соответствующих плоскому стационарному потоку сжимаемой жидкости. Все указанные свойства являются непосредственным следствием условия существования полного дифференциала. Показывается, что функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа, если поток потенциальный и линии тока перпендикулярны к линиям постоянной плотности. Потенциальная функция удовлетворяет уравнению Лапласа, если линии тока и линии постоянной плотности совпадают. *Г. Н. Положий*

763. Исключительные интегралы не вполне интегрируемого уравнения в полных дифференциалах. Пьяджо (Exceptional integrals of a not completely integrable total differential equation. Piaggio H. T. H.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953, **1**, 137—138 (англ.)

Обычная теория одного уравнения Пфаффа справедлива, если коэффициенты принадлежат классу C^1. Автор отмечает, что это не является необходимым условием для существования решения. В качестве примера он берет пфаффиан $z^m\,dx + z^n\,dy + dz$; $m > 0$, $n > 0$, $m + n = 1$, $m \neq n$, который имеет интегральную поверхность $z = 0$, хотя коэффициенты не дифференцируемы по z на этой поверхности. Такое решение он называет исключительным, чтобы отличить его от особых интегралов, которые появляются в обычной теории и обращают коэффициент при $\omega\omega'$ в 0, где ω — пфаффиан (здесь класса 3) и ω' — производная форма. *J. M. Thomas*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 129.

764 К. Методы математической физики. Т. I. Курант, Гильберт. Пер. с нем. (Methods of mathematical physics. Vol. I. Courant R., Hilbert D. Transl. from Germ., XVI+562 pp., Intersci. Publ., Inc., New York, Intersci. Publ. Ltd, London, 1953, 8.00 doll.) (англ.)

Первое английское издание приведенной в заглавии книги отличается от советского издания 1951 г. небольшими изменениями и дополнениями. Более или менее существенные дополнения приведены в главе «Вариационное исчисление», куда добавлен параграф о взаимных квадратичных вариационных задачах, а также в главе «Специальные функции, к которым приводят задачи о собственных значениях», где приведено обстоятельное дополнение о преобразовании шаровых функций, написанное Магнусом (W. Magnus) и основанное на не опубликованных в печати результатах Герглотца (G. Herglotz). В конце книги дана дополнительная библиография по главам (в основном за последние годы). *М. К. Керимов*

765 Д. Единственность и существование решений некоторых краевых задач для дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка. Скоробогатько В. Я. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. наук, Львовский гос. ун-т, Львов, 1954

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

766. О вынужденных нелинейных колебаниях с высокой частотой возбуждения и их устойчивости. Штельмахер (Über erzwungene nichtlineare Schwingungen hoher Erregerfrequenz und ihre Stabilität. Stellmacher K. L.), Z. angew. Math. und. Mech., 1954, **34**, № 3, 105—119 (нем.)

Исследуется периодическое решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \alpha F(\alpha, \tau, \varphi),$$

где α — малый параметр, а правая часть имеет вид

$$\alpha F = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k}^{+k} \alpha^k e^{2il\tau} a_{kl}.$$

Периодическое решение ищется в виде формального ряда

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|l| \leqslant k} A_{kl} \zeta_{kl},$$

где $\xi^2 = \alpha e^{2i\tau}$, $\eta^2 = \alpha e^{-2i\tau}$, $\zeta_{kl} = \xi^{k+l} \eta^{k-l}$.

Рассматриваются различные случаи, которые могут представиться при вычислении коэффициентов A_{kl}. Доказывается сходимость полученных разложений, и дается оценка радиуса сходимости. Для установления критерия устойчивости составляется соответствующее уравнение в вариациях, характеристические показатели которого ищутся методом разложения по параметру α. Полученные результаты применяются к исследованию колебаний маятника, точка подвеса которого совершает колебания высокой частоты. *И. Г. Малкин*

767. О взаимодействии микросистем с нулевыми колебаниями электромагнитного поля. Адирович Э. И., Подгорецкий М. И., Ж. эксперим. и теор. физики, 1954, **26**, № 2, 150—152

Рассматривается взаимодействие некоторых простейших микросистем (гармонический и ангармонический осциллятор, электрон в постоянном магнитном поле) с нулевыми колебаниями квантованного электромагнитного поля. Показано, что влияние нулевых колебаний приводит к появлению у классических систем отличной от нуля минимальной энергии, а также вероятностного распределения координат и импульсов. Найденные значения энергии совпадают с соответствующими результатами квантовой механики только в среднем, обнаруживая флюктуации во времени. Таким образом, для получения правильных результатов необходим отказ от классического толкования микросистем.

Высказывается предположение о том, что взаимодействие с нулевыми электромагнитными колебаниями играет в микромире существенную роль, не исчерпывающуюся малыми эффектами, подобными сдвигу атомных уровней. *Ю. А. Митропольский*

768. Нелинейные колебания в хронометрии. Хаг (Les oscillations non linéaires en chronométrie. Haag Jules), Actes du Colloque International des Vibrations non linéaires, Ile de Porquerolles, 1951, pp. 1—16, discussion, p. 15, Publ. Sci. Tech. Ministère, de l'Air. Paris, № 281, 1953 (франц.)

Обзорная статья, в которой автор рассматривает последние работы по теории колебаний нелинейных систем, особенно те вопросы, которые интересны в связи с конструированием часов и других колебательных механизмов. Кратко рассмотрены многочисленные задачи, касающиеся устойчивости колебаний, синхронизации и эффектов диссипативных сил. *L. A. MacColl*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 1, 32.

769. О биологических флюктуациях. Тарабини (Sulle fluttuazioni biologiche. Tarabini Vera), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, **8**, № 4, 422—428 (итал.)

Рассматривая известную задачу Вито Вольтерра о совместном существовании двух биологических видов в предположении, что существа одного вида питаются продуктами среды, а существа другого вида питаются, пожирая существа первого вида, автор выводит уравнения

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1 (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 + \delta_1 N_1 - \lambda_1 N_1^3),$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2 (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1),$$

где N_1 и N_2 обозначают соответственно количества существ первого и второго видов, а ε_1, ε_2, γ_1, γ_2, δ_1 и δ_2 — некоторые положительные константы.

Ссылаясь на метод Крылова — Боголюбова, автор доказывает, что если

$$\frac{\delta_1 \varepsilon_2}{\gamma_2} - 3\lambda_1 \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\right)^3 > 0$$

и параметры λ_1 и δ_1 достаточно малы, то эта система имеет устойчивый предельный цикл

$$\nu_1 = a\sqrt{\varepsilon_1} \cos(\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\, t + \Phi),$$

$$\nu_2 = a\sqrt{\varepsilon_2} \sin(\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\, t + \Phi),$$

где $\nu_1 = \frac{N_1}{k_1} - 1$, $\nu_2 = \frac{N_2}{k_2} - 1$, $k_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$, $k_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + \frac{\delta_1}{\gamma_1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\right) - \frac{\lambda_1}{\gamma_1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\right)^3$, $a = \sqrt{\frac{\delta_1 k_1 - 3\lambda_1 k_1^3}{3\lambda_1 k_1^3 \varepsilon_1}}$.

С. А. Стебаков

770. К устойчивости периодических вынужденных боковых колебаний корабля. Грим (Zur Stabilität der periodischen, erzwungenen Rollschwingungen eines Schiffes. Grim O.), Ingr-Arch., 1954, **22**, № 1, 55—59 (нем.)

Рассматривается устойчивость периодических вынужденных колебаний, описываемых дифференциальным уравнением

$$\Theta \ddot{\varphi} + Gh(\varphi) = M, \qquad (1)$$

где $Gh(\varphi)$ пропорционально φ только для малых значений последнего, а в общем случае является сильно нелинейной функцией φ.

Для определения устойчивости некоторого периодического решения φ уравнения (1) автор рассматривает уравнение с периодическими коэффициентами

$$\Theta \ddot{\psi} + G[h(\varphi + \psi) - h(\varphi)] = 0. \qquad (2)$$

У уравнения (2) существуют устойчивая и неустойчивая области, где ψ либо со временем затухает, либо неограниченно возрастает. Решается вопрос об устойчивости решения уравнения (1).

При

$$\frac{G}{\Theta} h(\varphi) = \omega_0^2 \varphi \left(1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_k^2}\right) \qquad (3)$$

(φ_k — некоторые постоянные) и точно синусоидальном $\varphi = \bar{\varphi} \sin \omega t$, имеет место, если

$$\frac{M}{\Theta} = \bar{\varphi}\left(-\omega^2 + \omega_0^2 - {}^3/_4 \omega_0^2 \frac{\bar{\varphi}^2}{\varphi_k^2}\right) \sin \omega t + \bar{\varphi} \frac{\omega_0^2}{4} \frac{\bar{\varphi}^2}{\varphi_k^2} \sin 3\omega t,$$

уравнение (2) сводится к общеизвестному уравнению Матье

$$\ddot{\psi} + (\lambda + \nu \cos x)\psi = 0, \qquad (4)$$

где $\lambda = \frac{1}{4}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\overline{\varphi}^2}{\varphi_k^2}\right)$, $\nu = \frac{3}{8}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{\overline{\varphi}^2}{\varphi_k^2}$.

Анализ областей устойчивых и неустойчивых решений уравнения (4) непосредственно показывает, для каких пар значений ω, φ вынужденные периодические колебания $\overline{\varphi}\sin\omega t$ являются устойчивыми и неустойчивыми. Так, например, в случае (3) верхняя ветвь кривой вынужденных колебаний не для всех периодов устойчива.

Изложенный способ автор применяет к рассмотрению более сложных случаев, например анализируется устойчивость, если

$$\varphi = \overline{\varphi}_1 \sin\omega t + \overline{\varphi}_2 \sin 3\omega t,$$

а $h(\varphi)$ определяется выражением (3). Рассмотрен также случай, когда

$$h(\varphi) = a\varphi + b\varphi^3 - c\varphi^5, \quad \varphi = \overline{\varphi}\sin\omega t.$$

Ю. А. Митропольский

771. Вынужденные колебания в системе с нелинейной силой упругости и затуханием. Лысенко Б. М., Сб. тр. Лабор. проблем быстроход. машин и механизмов АН УССР, 1953, № 4, 31—38

Исследуются колебания нелинейной системы (моделью которой служит пружина переменного шага), описываемые дифференциальным уравнением

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\eta}{\pi\omega}(1 + \lambda x_0^2)\frac{dx}{dt} + \alpha x - \beta x^2 + \gamma x^3 = m r\omega^2 \sin\omega t,$$

где M — колеблющаяся масса; m, r, ω — соответственно масса, эксцентриситет и угловая скорость неуравновешенного груза; x_0 — амплитуда колебаний; α, β, γ, η, λ — постоянные. Вводя переменные

$$x_1 = \sqrt{\gamma/\alpha}\, x, \quad t_1 = \sqrt{\alpha/M}\, t$$

и пользуясь методом линеаризации, автор ищет решение в виде

$$x_1 = a_{01} + a_{11}\sin\Omega t_1 + b_{11}\cos\Omega t_1,$$

где a_{01}, a_{11}, b_{11} находятся графически в зависимости от Ω. Построены резонансные кривые.

А. Н. Обморшев

772. О достаточных условиях захвата в ограниченной гиперболической задаче трех тел при тесных двойных сближениях. Мерман Г. А., Бюл. Ин-та теор. астрономии АН СССР, 1953, 5, № 6, 325—372

Даны условия, которым должны удовлетворять начальные положения и скорости трех тел, чтобы произошел захват, т. е. чтобы: 1) при $t \to +\infty$ одно взаимное расстояние (r) оставалось ограниченным, а два других (r_0, r_1) неограниченно возрастали (гиперболо-эллиптическое движение) и 2) чтобы при $t \to -\infty$ все взаимные расстояния неограниченно возрастали (гиперболическое движение). Масса $p_0 = m_0 = 0$ (ограниченная задача).

После анализа существа поставленного вопроса и вывода вспомогательных неравенств, вытекающих из дифференциальных уравнений задачи, автор выводит 15 различных достаточных критериев гиперболо-эллиптического движения при $t > 0$.

В работе развита также теория оценок погрешностей, получающихся в результате замены задачи некоторой приближенной схемой при тесном сближении конечных масс. Получены необходимые условия захвата, состоящие в том, что захват может произойти только в результате тесного двойного сближения. Даются необходимые и достаточные условия всех трех видов движения, возможных в приближенной схеме. Вопрос решается знаком выражений (1) и (2):

$$\frac{m_1}{r(0)} - \frac{\dot{r}(0)^2}{2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left\{\dot{\xi}(0)\left[\frac{na}{e} - \dot{x}_{21}(0)\right] + \eta(0)\left[\frac{na}{e}\sqrt{e^2-1} - \dot{y}_{21}(0)\right] + \frac{m_2}{r_0(0)}\right\}, \qquad (1)$$

$$\frac{m_1}{r(0)} - \frac{\dot{r}(0)^2}{2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left\{-\dot{\xi}(0)\left[\frac{na}{e} + \dot{x}_{21}(0)\right] + \eta(0)\left[\frac{na}{e}\sqrt{e^2-1} - \dot{y}_{21}(0)\right] + \frac{m_2}{r_0(0)}\right\}. \qquad (2)$$

Если (1) > 0 и (2) > 0, то движение в приближенной схеме будет гиперболо-эллиптическое. Если (1) < 0 и (2) < 0, то движение гиперболическое. Если же (1) > 0, (2) < 0 при $t > 0$, либо (1) < 0, (2) > 0 при $t < 0$, то осуществляется движение с захватом.

В. Ф. Проскурин

773. Пример захвата в плоской ограниченной гиперболической задаче трех тел. Мерман Г. А., Бюл. Ин-та теор. астрономии АН СССР, 1953, 5, № 6, 373—391

Дан пример захвата тела нулевой массы телом конечной массы. На участке тесного сближения траектория определена как численным интегрированием, так и «методом оценок». Получено строгое доказательство захвата. Работа является примером, иллюстрирующим исследования автора по тому же вопросу (см. реф. 772).

В. Ф. Проскурин

774. Особые траектории соударения общей задачи двух тел. Фрадлин Б. Н., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1953, 12, 25—34

Рассматривается динамическая задача о движении материальной точки под действием центральной силы. Дифференциальные уравнения движения в полярных координатах (r, θ) имеют вид

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = f(r), \qquad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

Предполагается, что $f(r) = \frac{dF(r)}{dr}$ есть аналитическая функция на интервале $0 < r < +\infty$, она может иметь особенности при $r = 0$ и $r = \infty$. Автор приводит общее решение этой задачи в виде квадратур:

$$\theta = \theta_0 + c\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{2h - c^2r^{-2} + 2F(r)}},$$

$$t = t_0 + \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2h - c^2r^{-2} + 2F(r)}},$$

где $r_0 \neq 0$, h и c — постоянные интегралов живых сил и площадей.

Исследуются особые траектории соударения, вдоль которых $r \to 0$, и изучается поведение функций $t(r)$ и $\theta(r)$ на этих траекториях при различных предположениях относительно $f(r)$.

Следует отметить, что некоторые выводы автора относительно разложимости функции $r(t)$ по целым или дробным степеням $t - t_1$ являются ошибочными.

Так, например, на стр. 28 утверждается, что при $A < 0$, $1 < n < 3$ $r(t)$ разлагается в ряд по целым степеням $(t_1 - t)^{\frac{2}{n+1}}$. Пусть $f(r) = \frac{A}{r^n}$, $F(r) = \frac{A}{1-n}\frac{1}{r^{n-1}}$. При $c = 0$ из формулы для общего решения получаем $(t_1 - t)^{\frac{2(n-1)}{n+1}} = r^{n-1} S(r^{n-1})$, где $S(z)$ — сходящийся ряд

$$S(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots \qquad (A_0 \neq 0).$$

Обращая этот ряд, найдем:

$$r = (t_1 - t)^{\frac{2}{n+1}} S\left[(t_1 - t)^{\frac{2(n-1)}{n+1}}\right],$$

что противоречит утверждению автора, если только $n \neq 2$. Впрочем, ошибочные утверждения автора легко исправимы. *Г. А. Мерман*

775. Неустановившийся приток жидкости и газа к несовершенным скважинам. Х е й н А. Л., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 1, 33—36

Задача, указанная в заглавии, аналогична той, которую автор ранее рассматривал в другой своей работе (см. реф. 780). Метод решения задачи здесь тот же, что и в первой статье.

Если в первой работе автор допускал возможность задания произвольных граничных значений потенциала скорости $\Phi(r, z, \alpha, t)$ на поверхности скважины, то теперь он принимает, что на поверхности несовершенной круглой скважины можно задать произвольные значения градиента потенциала, например, в форме

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{r=r_c} = \varphi(z, \alpha).$$

Такое задание одного из граничных условий для потенциала скорости в гидродинамическом отношении ничем не оправдано.

Корректная постановка граничных условий на поверхности скважины для Φ приводит к условиям:

1) $\partial\Phi / \partial r = 0$ — на недренирующих участках поверхности скважины $(r = r_c)$;

2) $\Phi = \Phi_c = \text{const}$ (или $= \Phi_c(t)$ в общем случае) на дренирующих участках поверхности скажины $(r = r_c)$.

Полученное автором формальное решение представляет разложение $\Phi(r, z, \alpha, t)$ в двойной ряд, причем коэффициенты, зависящие от времени t и полярного радиуса r, содержат интегралы от бесселевых функций. Для нахождения коэффициентов разложения необходимо иметь распределение градиента потенциала на поверхности дренирующих участков. Автор допускает возможность замены неизвестного неравномерного распределения равномерным. Законность таких упрощений и оценка их влияния на предполагаемое решение в статье не рассмотрены. Приводимые в статье некоторые частные решения задачи о притоке к совершенной скважине хорошо известны в литературе.

В. П. Пилатовский

776. Двумерные возмущения линейного потока. Х ё й л а н д (On the two-dimensional perturbation of linear flow. H ø i l a n d E i n a r), Geofys. publ., 1953, **18**, № 9, 3—12 (англ.)

Рассматриваются решения уравнения возмущенного потока несжимаемой однородной невязкой жидкости

$$w'' - \left(\frac{U''}{U - c} + k^2\right) w = 0,$$

где $U = U(z)$ — скорость невозмущенного линейного потока в направлении оси x между плоскостями $z = 0$ и $z = h$; $w = w(z)$ — скорость возмущенного потока, причем в плоскостях, параллельных плоскости xOy, возмущения тригонометрически зависят от x и t и не зависят от z; c — скорость распространения, k — волновое число возмущений.

Краевые условия: $w(0) = w(h) = 0$. Сначала исследуется возможность существования решений, представляющих перманентные волны, в случаях, когда

$$f(z) = \frac{U''}{U - c} + k^2$$

имеет простой вид (отрицательная постоянная или $-e^{2z} + \nu^2$), позволяющий интегрировать уравнение в элементарных или цилиндрических функциях. Далее подобно исследуется случай гармонического профиля скоростей $U = A\cos\gamma z$ невозмущенного потока, в котором для частоты γ элементарным интегрированием выводится трасцендентное уравнение. В заключение рассматривается случай комплексного c при том же профиле скоростей невозмущенного потока. Получаемые результаты анализируются с гидродинамической точки зрения. *В. И. Левин*

777. Диффракция поля диполя на идеально проводящей полуплоскости. С и н ь о р (The diffraction of a dipole field by a perfectly conducting half-plane. S e n i o r T. B. A.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, **6**, ч. 1, 101—114 (англ.)

Рассматривается вопрос о диффракции поля электромагнитного диполя на идеально проводящей полуплоскости. Для случая, когда ось диполя параллельна краю полуплоскости, задача сводится к скалярной и была рассмотрена ранее другими авторами. Для других направлений оси диполя задача к скалярной не сводится. Применяемый в статье метод решения пригоден для любых направлений диполя, но рассмотрение ведется для случая, когда ось диполя перпендикулярна полуплоскости.

Компонента вектора Герца поля диполя в свободном пространстве представляется в виде суперпозиции плоских волн:

$$\Pi_y = \frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha=P\left(\frac{\pi}{2}\right)} d\alpha \int\limits_{\beta=P\left(\frac{\pi}{2}\right)} d\beta \times$$

$$\times \exp[ik(x\cos\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\cos\beta - z\sin\beta)] \times$$

$$\times F(\alpha, \beta)\cos\beta,$$

где $F(\alpha, \beta) = \exp[-ik(x_0\cos\alpha\cos\beta + y_0\sin\alpha\cos\beta - z_0\sin\beta)]$,

$P(\pi/2)$ — контур на комплексной плоскости, проходящий через точку $\pi/2$ и имеющий асимптотами прямую $x = 0$ при $y \to -\infty$ и прямую $x = \pi$ при $y \to \infty$.

Отсюда по обычным формулам получается следующее выражение для электрического поля диполя в свободном пространстве:

$$\overline{\mathbf{E}} = \frac{k^2}{2\pi i} \int\limits_{\alpha=P\left(\frac{\pi}{2}\right)} d\alpha \int\limits_{\beta=P\left(\frac{\pi}{2}\right)} d\beta \times$$

$$\times \{-\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta,\ 1-\sin^2\alpha\cos^2\beta,\ \sin\alpha\sin\beta\cos\beta\} \times$$

$$\times \exp[ik(x\cos\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\cos\beta - z\sin\beta)] \times$$

$$\times F(\alpha, \beta)\cos\beta$$

и соответствующее выражение для магнитного поля. Затем используются выражения для дифракции плоских волн на идеально проводящей полуплоскости, полученные ранее другими авторами. Заменяя плоские волны, стоящие под интегралами в формулах для полей, выражениями для диффрагированных плоских волн, автор получает выражения для диффрагированных сферических волн. В частности, для компоненты электрического поля E_y получается следующая формула:

$$E_y = \frac{k^2}{2\pi i} \int\limits_{\alpha=P\left(\frac{\pi}{2}\right)} d\alpha \int\limits_{\beta=P\left(\frac{\pi}{2}\right)} d\beta\,(1-\sin^2\alpha\cos^2\beta) \times$$

$$\times \exp[ik(x\cos\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\cos\beta - z\sin\beta)] \times$$

$$\times F(\alpha, \beta)\cos\beta - \frac{k^2}{2\pi^2}\frac{y}{|y|} \times$$

$$\times \int\limits_{\alpha=P\left(\frac{\pi}{2}\right)} d\alpha \int\limits_{\beta=P\left(\frac{\pi}{2}\right)} d\beta \int\limits_{\gamma=C} d\gamma \times$$

$$\times \left\{ \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha+\cos\gamma} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\alpha\sin\gamma\sin^2\beta}{\cos\alpha+\cos\gamma} \right\} \times$$

$$\times \exp[-ik(x\cos\gamma\cos\beta + |y|\sin\gamma\cos\beta + z\sin\beta)] \times$$

$$\times F(\alpha, \beta)\cos\beta,$$

где C — контур, состоящий из частей: 1. $x = 0$, $-\infty < y \leqslant 0$; 2. $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $y = 0$; 3. $x = \pi$, $0 \leqslant y < \infty$. Далее проводится исследование полученного решения. Выделяются члены, соответствующие приближению геометрической оптики и собственно диффрагированному полю. Исследуется характер особенности полей у края проводящей полуплоскости и сравнивается с соответствующим решением для скалярной проблемы.

Ю. Н. Днестровский

778. К термодинамике необратимых процессов. **Попов** (Sur la thermodynamique des processus irréversibles. Popoff Kyrille), Z. angew. Math. und Phys., 1954, 5, № 1, 67—83 (франц.)

Дана адиабатически изолированная система, состояние которой предполагается определенным значениями n переменных x_i, причем $x_i = 0$ соответствует стабильному состоянию. В окрестности этого стабильного состояния главная часть приращения энтропии

$$\Delta S = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} g_{ik}x_i x_k, \quad g_{ik} = g_{ki},$$

где $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} g_{ik}x_i x_k$ — положительно определенная форма. Показывается, как симметричный тензор L_{ik}, фигурирующий в «феноменологических» соотношениях

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} L_{ik}X_x, \quad X_k = \frac{\partial(-\Delta S)}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

может быть выражен через g_{ik} при помощи интегрирования системы

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

с условиями на бесконечности: $x_i(+\infty) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Приводятся примеры приложений к вопросам теплообмена.

Статья является третьей под тем же названием. Первые две см. Z. angew. Math. und Phys., 1952, № 3, 42—51 и 440—448. *В. И. Левин*

779. Экспериментальная проверка теории бушующих систем. **Фогель** (Vérifications expérimentales de la théorie des systèmes déferlants. Vogel T.), J. phys. et radium, 1953, **14**, № 12, 59 (франц.)

Указывается, что при помощи мультивибратора Абрагама — Блоха можно наблюдать на катодном осциллографе некоторые особенности бушующих систем, предсказанные теорией. Так, например, в случае плоской бушующей системы с двумя семействами траекторий, одно из которых имеет на границе бушевания (frontière de déferlement) притягивающий узел, периодический режим достигается по истечении конечного промежутка времени, иногда даже после одного переходного колебания. *Ф. В. Широков*

780. Применение операционного исчисления к теории неустановившегося притока жидкости и газа к несовершенным скважинам. **Хейн А. Л.**, Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 1, 33—36

Рассматривается задача о неустановившемся притоке сжимаемой жидкости (газа) к несовершенной круглой скважине, дренирующей неограниченный изотропный пласт постоянной мощности. Предполагается, что жидкость (газ) фильтруется на отдельных участках цилиндрической поверхности скважины, симметрично расположенных относительно некоторой меридиональной плоскости, проходящей через ось скважины. Для решения задачи

вводится потенциал скорости $\Phi(r, z, \alpha, t)$, определяемый из линеаризованного газового уравнения Л. С. Лейбензона

$$a\nabla^2\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t}. \qquad (1)$$

Методами операционного исчисления с использованием разложений по ортогональным функциям потенциал $\Phi(r, z, \alpha, t)$ представлен в форме двойного тригонометрического ряда по переменным z, α (апликата и полярный угол цилиндрической системы координат). Коэффициенты разложения, содержащие бесселевы функции переменного r, определяются из условий на поверхности скважины и границах пласта. Автор допускает, что на поверхности скважины (при $r = r_c$ и $0 < z < h$) потенциал Φ можно задать произвольно, например, в форме

$$\Phi(r_c, z, \alpha, t) = \Phi_c(z, \alpha). \qquad (2)$$

Такая форма одного из граничных условий физически ничем не оправдана. Указанный произвол в допущениях автора автоматически исключается в частном случае решения, когда скважина дренирует по всей поверхности цилиндра, т. е. в случае совершенной скважины; здесь автор приходит к результатам, ранее полученным другими исследователями.

Библиография статьи содержит одно название и не отражает известных применений операционного исчисления к задачам фильтрации упругой жидкости или к аналогичным задачам теплопроводности.

Примечание референта. Принятие автором неоправданного граничного условия (2) для потенциала Φ привело лишь к формальному представлению искомой функции Φ в форме двойного тригонометрического ряда; полученный ряд лишь в тривиальных, хорошо известных случаях представляет решение задачи; в общем же случае вместо условия (2) на забое скважины функция Φ удовлетворяет требованиям:

1) на множестве непроницаемых участков поверхности скважины

$$\partial\Phi / \partial r = 0 \quad \text{при } r = r_c;$$

2) на множестве проницаемых (дренирующих) участков поверхности скважины

$$\Phi = \Phi_c = \text{const} \quad \text{при } r = r_c.$$

Основной результат автора, кроме указанного недостатка, содержит существенную опечатку, благодаря которой формула (10) статьи теряет смысл.

В. П. Пилатовский

781. Разлагающиеся уравнения. Пайу (Equations qui se decomposent. Pailloux Henri), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 17, 960—961 (франц.)

Автор предлагает «общее решение» линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\Omega(T, X_i)\, u(t, x_i) = 0$$

$$\left(T = \frac{\partial}{\partial t},\ X_i = \frac{\partial}{\partial x_i};\ i = 1, \ldots, n\right),$$

где $\Omega(T, X_i)$ — полином, записывать в символической форме

$$u(t, x_i) = \sum_{\nu} e^{t r_\nu(X_i)}\, \varphi_\nu(x_i).$$

Здесь $\varphi_\nu(x_i)$ суть произвольные функции (например начальные данные Коши), а $r_\nu(X_i)$ — алгебраические операторы от X_i, определяемые из уравнения $\Omega(r, X_i) = 0$. Корни последнего уравнения предполагаются различными.

Далее автор утверждает, что: 1) «общее решение» уравнения $\Omega^m u = 0$ может быть определено в виде полинома по t, степени не выше $m - 1$, коэффициентами которого служат решения уравнения $\Omega v = 0$; 2) «общее решение» уравнения $\Omega_1\Omega_2 u = 0$ есть сумма «общих решений» $\Omega_1 v = 0$ и $\Omega_2 w = 0$, если Ω_1 и Ω_2 являются «независимыми операторами» «без общего делителя».

Наконец, формулируются необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнения $\Omega_k u = f_k$, $k = 1, \ldots, n$, имели решение, общее всем им.

О. А. Ладыженская

782. Анализ напряжения и тока на концах составной линии. Коваленков В. И., Сб. науч. работ по проводн. связи, АН СССР, 1953, **2**, 5—12

Рассмотрено решение системы телеграфных уравнений, соответствующее стационарному процессу синусоидального переменного тока в сложной телефонной линии, которая состоит из нескольких участков последовательно соединенных однородных линий. Пользуясь известными формулами для комплексных напряжений и токов в однородной линии, автор элементарным путем получает аналогичные формулы для сложной линии.

Н. А. Бразма

783. Некоторые задачи динамической теории упругости для сред, содержащих цилиндрические или сферические границы раздела. Петрашень Г. И., Смирнова Н. С., Гельчинский Б. Я., Уч.зап. ЛГУ, сер. матем., 1953, **27**, № 170, 221—265

Методом неполного разделения переменных, применявшихся в прежних работах Петрашеня и его учеников, решаются граничные задачи теорий упругости с заданными режимами для областей с цилиндрическими и сферическими границами.

Выясняется, что в случае непрерывно распределенных воздействий решения имеют классический смысл, в случае же сосредоточенных сил решения обладают особенностями и могут трактоваться лишь как решения в некотором обобщенном смысле. Подробно обсуждается физический смысл обобщенных решений.

В. Д. Купрадзе

784. Колебания цилиндрической трубы, заполненной движущейся жидкостью. Ниордсон (Vibrations of a cylindrical tube containing flowing fluid. Niordson Frithiof I. N.), Trans. Roy. Inst. Technol. Stockholm, Sweden, 1953, **73**, 27 (англ.)

Рассматриваются колебания цилиндрической трубы, по которой течет жидкость, и трубы, обтека-

емой жидкостью. В обоих случаях считается, что жидкость течет с постоянной главной скоростью, параллельной оси трубы, и давление жидкости на трубу такое, что можно пренебречь срезывающими усилиями.

Для потенциала скоростей задача сводится к решению уравнения

$$c^2\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial t} + U^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

(c — скорость звука в жидкости, U — постоянная скорость жидкости на ∞) с граничным условием

$$V_r = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}V_x + \frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\varphi}V_\varphi \quad \text{при } r = a,$$

где V_r, V_x, V_φ — компоненты скорости в цилиндрических координатах, w — радиальная компонента смещения.

Подробно исследуются два случая: а) главная скорость течения жидкости равна нулю; б) пренебрегая продольными и крутильными колебаниями, можно считать, что труба колеблется, как балка. В обоих случаях приближенно выписываются частоты колебания для жидкостей с достаточно малой сжимаемостью. Устанавливается, что частоты колебания уменьшаются по сравнению с частотами колебания пустой трубы, хотя это уменьшение в большинстве частных случаев, как замечает автор, незначительно. В случае б) для довольно большой скорости частота колебания обращается в нуль, причем эта критическая скорость равна (приближенно)

$$U_0 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{EI}{\mu}},$$

где l — длина трубы, E — модуль Юнга, I — момент инерции поперечного сечения трубы (или балки), μ — масса движущейся жидкости длины единица.

В конце рассматривается колебание струны, по которой с постоянной скоростью движется равномерно распределенная масса. Доказывается, что граничная задача с начальными данными имеет решение для малых скоростей. *С. А. Терсенов*

785. К решению уравнения типа диффузии; приложение к теории ренормировки. Висконти (Sur une solution des équations du type de diffusion; applications à la théorie de la renormalisation. Visconti Antoine), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 26, 2489—2491 (франц.)

Приводятся результаты применения классической теории интегральных уравнений Фредгольма к операторному уравнению

$$U = U_0 + \lambda KU, \qquad (1)$$

где U_0, K — известные операторы в гильбертовом пространстве, λ — действительный или комплексный параметр. Применяя (1) к вектору состояния $|0>$ и разлагая решение уравнения по некоторой полной ортонормированной системе функций, автор получает бесконечную систему уравнений и формальное решение для нее в виде отношения двух рядов по степеням λ. Ряд в знаменателе аналогичен определителю Фредгольма $D(\lambda)$. Решение задачи представляется в виде

$$U = U_0 + \lambda\frac{\mathscr{D}(\lambda)}{D(\lambda)}U_0, \qquad (2)$$

где

$$\mathscr{D}(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!}\mathscr{D}_{n+1}, \qquad (3)$$

$$D(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!}D_n, \qquad (4)$$

а для $\mathscr{D}_{n+1}$ и D_n приводятся рекуррентные соотношения. Утверждается, далее, что для вполне непрерывных операторов U_0 и K ряды (3) и (4) являются целыми функциями. Сформулирована теорема: если $\overline{D}(\lambda)$ — произвольная целая функция λ, представляемая рядом по степеням λ, то решение (2) остается справедливым при подстановке вместо $\mathscr{D}(\lambda)$ ряда $\overline{\mathscr{D}}(\lambda)$, коэффициенты которого удовлетворяют соотношению

$$\overline{\mathscr{D}}_{n+1} = \overline{D}_n K - nK\overline{\mathscr{D}}_n, \quad \overline{D}_0 = 1.$$

Все выводы даются без доказательств. Результаты прилагаются к проблеме перенормировки в теории вакуума квантовой электродинамики.

Ю. Н. Днестровский

786. Периодические решения нелинейных уравнений параболического типа. Проди (Soluzioni periodiche di equazioni non lineari di tipo parabolico. Prodi Giovanni), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 193—196 (итал.)

Приводится следующая теорема: уравнение

$$u_t = u_{xx} + f(x, t, u, u_x)$$

при f периодическом по t с периодом T, имеет по крайней мере одно решение, периодическое по t с периодом T, удовлетворяющее условиям $u(0, t)=0$; $u(l, t) = 0$ $(l > 0, -\infty < t < \infty)$, если выполнены следующие условия:

а) f непрерывна в области $0 \leqslant x \leqslant l$,

$$-\infty < t < \infty, \quad -\infty < u < \infty, \quad -\infty < u_x < \infty$$

и удовлетворяет по совокупности аргументов условию Гельдера, когда u и u_x изменяются в произвольной ограниченной области;

б) пусть $\overline{f}(x, u, u_x) = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} f(x, t, u, u_x)$, тогда обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\overline{u}'' + \overline{f}(x, \overline{u}, \overline{u}') = 0$$

имеет в качестве интеграла функцию $\overline{u}(x)$, принимающую положительные значения на концах интервала $0 \leqslant x \leqslant l$.

Аналогично для

$$\underline{f}(x, u, u_x) = \min_{0 \leqslant t \leqslant T} f(x, t, u, u_x)$$

уравнение

$$\underline{u}'' + \underline{f}(x, \underline{u}, \underline{u}') = 0$$

имеет интеграл $\underline{u}(x)$, который принимает отрицательные значения на концах интервала $0 \leqslant x \leqslant l$.

Кроме этого, требуется, чтобы $u > \underline{u}$;

в) для ограниченных u

$$|f(x, t, u, u_x)| = O(|u_x|^\gamma) \text{ при } |u_x| \to \infty, \ \gamma < 2$$

равномерно по x, t, u,

Доказательство, намеченное в статье, использует методы Лерея и Шаудера (Успехи матем. наук, 1946, **1**, № 3—4, 71—95). Автор не указывает, что рассматриваемая им задача неоднократно изучалась при специальных предположениях о функции $f(x, t, u, u_x)$ (Каримов Д. Х., Докл. АНСССР, 1945, **46**, № 5, 191—195; 1947, **56**, № 2, 119—122; 1947, **58**, № 6, 969—974 и др.). *С. Д. Эйдельман*

787. Ход температуры воды в водохранилище в зимний период. Колесников А. Г., Докл. АН СССР, 1953, **92**, № 1, 37—40

Рассматривается решение задачи о формировании температуры воды в водохранилище глубиной h в зимний период, т. е. с момента установления на поверхности воды ледяного покрова.

Температурное поле воды находится из совместного решения одномерных уравнений турбулентного обмена тепла в воде

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = k_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial z^2}, \qquad -h < z < 0, \qquad (1)$$

и теплопроводности в грунте

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial z^2}, \qquad 0 < z < H, \qquad (2)$$

с граничными условиями равенства температур и потоков тепла на границе вода—грунт, нулевой температуры на границе вода—лед (которая неизменно поддерживается протекающим на этой границе процессом ледообразования) и постоянства температуры на глубине H годовых нулевых амплитуд в грунте. В качестве начальных условий для уравнений (1) и (2) принимается произвольное распределение температур в воде и грунте.

При строгой постановке задачи необходимо было бы на границе вода—лед задать еще и уравнение баланса тепла для описания механизма роста льда в толщину, а следовательно, и изменения h во времени. В этом случае для решения задачи необходимо было бы учесть и температурное поле ледяного покрова с нелинейными условиями на его нижней границе, так что задача свелась бы к сложной системе интегро-дифференциальных уравнений, решение которых нельзя получить в эффективном виде.

Распределение температур в грунте находится из решения задачи об аккумуляции тепла грунтом за летний период и расхода его осенью, т. е. в результате решения уравнения (2) с условием теплообмена на поверхности грунта в виде

$$z = 0, \qquad \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} = \alpha_2 [t_2 - t_1(\tau)],$$

причем $t_1(\tau)$, представляющая кривую фактического годового хода придонных температур воды в интервале от начала летнего нагрева до ледостава, аппроксимируется тригонометрическим рядом с конечным числом членов.

Решение уравнений (1) и (2) ищется методом разделения переменных с выделением в отдельное слагаемое стационарной части. Анализ и проведенные расчеты показывают, что полученное решение хорошо описывает процесс формирования зимнего хода температуры воды в согласии с данными непосредственных измерений температуры на различных по своему гидрологическому и термическому режиму водохранилищах. *А. А. Пивоваров*

788. Сезонные колебания в тепловом режиме течений. Кельдер Е. Г., Тр. Мор. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1953, **3**, 82—91

См. РЖМех., 1954, 3320.

789. Исследование температурного поля влажных материалов в процессе сушки (период постоянной скорости). Полонская Ф. М., Ж. техн. физики, 1953, **23**, № 5, 796—801

См. РЖФиз, 1954, 2571.

790. Распределение температуры и тепловые напряжения в модели сверхзвукового крыла. Пол, Оливер (Temperature distribution and thermal stresses in a model of a supersonic wing. Pohle Frederick V., Oliver Henry), J. Aeronaut. Sci., 1954, **21**, № 1, 8—16 (англ.)

При движении крыла аэроплана со сверхзвуковой скоростью происходит значительное повышение температуры пограничного слоя, окружающего крыло. В связи с этим дано решение задачи о неустановившемся распределении температуры и тепловых напряжений в силовых элементах крыла, состоящих из двух одинаковых параллельных поясов (пластин), верхнего и нижнего, связанных между собою системой плоских стенок, равноудаленных друг от друга и перпендикулярных к поясам. Ввиду получающейся при этом конструктивной симметрии идеализированного крыла, указанная задача ставится для двутавровой балки, верхняя и нижняя полки которой, благодаря внешнему аэродинамическому потоку, имеют распределенные источники тепла. Допускается, что отношение толщины стенки к ее высоте, а также отношение толщины полок к их ширине малы, поэтому задача сводится к предварительному определению неустановившегося распределения температуры вдоль стенки и полок, имитируемых составным стержнем из двух прямолинейных элементов.

Решение для схематизированной модели получено методами операционного исчисления с использованием преобразования Лапласа в отношении переменного t из системы двух дифференциальных уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant a),$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - hT_2 \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \quad (x = 0), \qquad \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0 \quad (x = b),$$

$$T_1 = T_2 \quad (x = a), \qquad \frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{w_2}{w_1} \frac{\partial T_2}{\partial x} \quad (x = a)$$

и начальных условиях

$$T_1 = T_2 = T_0 = \text{const}.$$

Здесь T_1, T_2 определяют распределение температуры соответственно в стенке и полке двутавровой балки в зависимости от времени t и линейной координаты x, отсчитываемой от центра профиля балки ($x = 0$) к месту соединения стенки и полки ($x = a$) и, далее, к каждому краю полок ($x = b$); k и h — постоянные коэффициенты теплопроводности и теплопередачи; w_2/w_1 — отношение удвоенной толщины полки к толщине стенки.

Тепловыми потерями на излучение и конвекцию в окружающую среду пренебрегают.

Распределение неустановившейся температуры дано в форме

$$T_1(x, t) = \sum_{m=1,2,\ldots}^{\infty} A_m \cos \alpha_m x \, e^{-k\alpha_m^2 t}, \qquad (1)$$

$$T_2(x, t) = \sum_{m=1,2,\ldots}^{M} B_m \operatorname{ch} \beta_m (x-a) \, e^{-k\alpha_m^2 t} + \sum_{m=M+1}^{\infty} B_m \cos \beta_m (x-a) \, e^{-k\alpha_m^2 t} \qquad (2)$$

(A_m, B_m — постоянные).

При помощи (1), (2) и известных зависимостей для определения температурных напряжений в прямолинейных стержнях исследуются напряжения в материале стенки и полок двутаврового профиля.

Результаты вычислений представлены графиками. Сделано сопоставление с аналогичной задачей, которую рассматривали Хофф и Торда (Hoff N. J., Proc. 3d Anglo-Amer. Aeronaut. Conf. at Brighton, England, 1951, Roy. Aeronaut. Sci., 77—114; Torda Paul, Hoff N. J., там же, 103 — 110) в предположении, что температура полки зависит только от времени по показательному закону.

Формула (32) содержит опечатку, исправление которой дает зависимость (2).

Библиография, 5 названий. *В. П. Пилатовский*

791. Нестационарный тепловой поток и теплосодержание в толстостенных массах. Гейслер (Nichtstationäre Wärmeströmung und Wärmespeicherung in dickwandigen Massen. Geisler Kurt W.), Allgem. Wärmetechnik, 1953, 4, № 9, 185—191 (нем.)

Процесс распространения тепла в слое, бесконечном в двух направлениях и имеющем в третьем направлении толщину s, описывается одномерным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial t}{\partial z} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \qquad a = \frac{\lambda}{c\rho}$$

при краевых условиях

$$\frac{\partial t\,(s/2, z)}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda}\left[t\left(\frac{s}{2}, z\right) - t_n\right];$$

$$\frac{\partial t\,(-s/2, z)}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda}\left[t\left(-\frac{s}{2}, z\right) - t_n\right]$$

и начальном условии $t(x, 0) = \varphi(x)$ (t_n — температура внешнего пространства).

Поскольку точное решение этой задачи связано со значительными трудностями, автор развивает приближенный метод решения, который он называет методом теплового баланса. Рассматривая равномерное распределение температуры в начальный момент и одинаковую с обеих сторон температуру внешней среды, которую можно положить равной нулю, он на основании соображений, не получивших в работе вполне строгого обоснования, приходит к выводу, что системой температурных линий в слое (линий $t(x)$ при фиксированном z) будет семейство эллипсов, имеющих одну и ту же горизонтальную ось, причем величина полуоси a определяется формулой

$$a = \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{s}{2}\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Каждому значению t_n температуры на границе соответствует в силу краевых условий единственная кривая рассматриваемого типа. Если рассматривать две кривые $t_1(x)$ и $t_2(x)$, то имеет место соотношение

$$\frac{t_1(x) - t_2(x)}{t_1(x)} = \text{const}.$$

Далее автор дает метод, позволяющий из соображений теплового баланса определить, какому моменту времени z соответствует каждая температурная кривая рассматриваемого семейства.

Наконец, автор отмечает, что в случае более сложного начального распределения температуры все же с течением времени температурные линии будут стремиться к рассмотренному выше семейству эллипсов, так что изложенный метод может быть применен при произвольных достаточно гладких начальных условиях.

В конце работы приводятся численные примеры, иллюстрирующие метод, в частности рассматривается случай, когда температура окружающей среды с обеих сторон слоя неодинакова.

Д. П. Костомаров

792. О двуслойной задаче теплопроводности воздух — почва. Добрышман Е. М., Белоусов С. Л., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 6, 1011—1014

См. РЖМех, 1954, 3746.

793. Трансформация нижнего слоя воздуха под влиянием подстилающей поверхности. Лайхтман Д. Л., Юдин М. И., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 2, 249, 252

См. РЖМех, 1954, 3382.

794. К гидродинамической теории зональной циркуляции атмосферы. Швец М. Е., Тр. Гл. геофиз. обсерв., 1953, № 41, 3—10

См. РЖМех, 1954, 3744.

795. Смысл векторного лапласиана. Мун, Спенсер (The meaning of the vector Laplacian. Moon Parry, Spencer Domina Eberle), J. Franklin Inst., 1953, 256, № 6, 551—558 (англ.)

Обращается внимание на то обстоятельство, что оператор $\Delta \equiv \nabla^2$ имеет разный смысл в зависимости от того, применяется ли он к скалярной или векторной функции, а именно:

$$\nabla^2\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi, \quad \nabla^2\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}.$$

Встречающееся в литературе определение

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial z^2}$$

совпадает с приведенным выше только в прямоугольных декартовых координатах. Для оператора $\nabla^2\boldsymbol{E}$ (который предлагается обозначить специальным символом $^*\boldsymbol{E}$) выписывается выражение в произвольных криволинейных координатах, а также в частных случаях цилиндрических и сферических координат.

В заключение отмечается преимущество пользования векторным лапласианом при интегрировании уравнений Максвелла в связи с решением типичных задач электро- и радиотехники. *В. И. Левин*

796. Некоторые теоремы единственности для уравнений Максвелла. Де-Сочо (Alcuni teoremi di unicità per le equazioni di Maxwell. De Socio Marialuisa), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, сер. 3, № 2, 196—200 (итал.)

Доказываются теоремы:

1. В заполненной однородной средой области D, заключенной внутри поверхности σ, регулярное гармоническое электромагнитное поле единственным образом определяется через тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей на поверхности σ_1, являющейся частью σ. 2. В односвязном цилиндрическом волноводе электромагнитное поле, заключенное между плоскостями Σ_1 и Σ_2, ортогональными к оси волновода, единственным образом определяется через нормальные составляющие электрического и магнитного полей на плоскостях Σ_1 и Σ_2,

Для доказательства этих теорем используется векторная форма формулы Грина. Теорема 2 верна также для волновода, сечение которого является многосвязной областью. *П. П. Бирюлин*

797. Основы точной теории волнового поля линий передачи. Гринберг Г. А., Бонштедт Б. Э., Ж. техн. физики, 1954, 24, № 1, 67—95.

Развита теория распространения электромагнитных волн вдоль бесконечного прямого провода, параллельного поверхности земли, рассматриваемой как однородное проводящее полупространство. При этом предполагается, что радиус провода a мал по сравнению с высотой провода h (над землей), благодаря чему можно считать распределение тока на проводе аксиально симметричным, а вторичное поле (поле земли) — однородным на поперечном сечении провода. В остальном данная электродинамическая задача решается вполне строго. Первичное поле (поле провода) выражается через функции Бесселя и Ганкеля, а для составляющих вторичного поля получены интегральные представления (интегралы Фурье).

Выведено характеристическое уравнение для комплексного волнового числа, содержащее трансцендентную функцию F, для которой авторы дают представления в виде интеграла и ряда, а также таблицу, охватывающую наиболее интересный интервал значений ее аргумента.

Полученные результаты сравниваются с результатами других авторов, решавших ту же задачу в более узких предположениях, а также с результатами решения той же задачи по методу телеграфных уравнений. При этом вскрывается физический смысл функции F, которая оказывается пропорциональной полному погонному сопротивлению, вносимому в линию «вторым проводником» — землей.

Во второй части работы та же задача о проводе над землей решается иначе, а именно, поле внутри земли не рассматривается, а наличие земли учитывается с помощью приближенных граничных условий Леонтовича. Произведено сравнение обоих решений и установлены границы применимости второго решения.

В работе выведены довольно простые формулы для поля передающей линии вблизи земли на различных расстояниях от провода, что имеет существенное значение для оценки влияния данной линии на линии связи.

В дополнении описан простой метод введения поправок, связанных с конечным значением радиуса провода a по сравнению с высотой h. Показано, что учет асимметрии тока на проводе и неоднородности вторичного поля приводит к появлению поправочных членов порядка $\left(\frac{a}{h}\right)^2$. Этот метод может быть также применен для расчета «эффекта близости» в многопроводных передающих линиях, но лишь при условии, что данный эффект выражен не слишком сильно. *Л. А. Вайнштейн*

798. Дифракция электромагнитных волн на отверстии в большом экране. Беккефи (Diffraction of electromagnetic waves by an aperture in a large screen. Bekefi G.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 9, 1123—1130 (англ.)

С помощью одной компоненты вектора Герца строится приближенное решение задачи о дифракции электромагнитных волн на отверстии S_0 в идеально проводящей плоскости $z = 0$. Рассматривается специальный случай однородной плоской волны $\{\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{H}_i\}$, падающей нормально к экрану в области $z < 0$, с электрическим вектором $\boldsymbol{E}_i$, поляризованным в плоскости (x, y). Предполагается, что компонента $\Pi_x \neq 0$, а компоненты $\Pi_z = \Pi_y = 0$ во всем пространстве. Выражения полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ через Π_x получаются обычным образом. Компонента Π_x удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\Delta\Pi_x + k^2\Pi_x = 0$$

во всем пространстве. Известно (Bethe H. A., Phys. Rev., 1944, 66, 163), что при $z = 0$ в отверстии S_0 должны выполняться равенства

$$[\boldsymbol{n}\boldsymbol{H}_0] = [\boldsymbol{n}\boldsymbol{H}_i], \quad (\boldsymbol{n}\boldsymbol{E}_0) = (\boldsymbol{n}\boldsymbol{E}_i), \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ — полные поля в S_0. Автор отмечает, что граничных условий

$$\left(\frac{\partial\Pi_x}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial\Pi_{ix}}{\partial z}\right)_{z=0} \text{ в } S_0$$

достаточно для выполнения (1). На поверхности проводящего экрана в качестве граничного условия полагается

$$\Pi_x|_{z=0} = 0.$$

С помощью функции источника и поставленных граничных условий строится интегральное уравнение для распределения Π_x в S_0:

$$\left.\frac{\partial \Pi_{ix}}{\partial z'}\right|_{z=0} = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\int\limits_{S_0}\Pi_x(x, y)\frac{e^{-ikr}}{r}\,dxdy\right)\Bigg|_{z=0}.$$

Подробно рассматривается дифракция на круглом отверстии. Полученные результаты дают хорошее приближение для случая, когда радиус отверстия много больше длины волны. В предельном случае получается обычная формула Кирхгофа. Приводится сравнение результатов теории с экспериментом. *Ю. Н. Днестровский*

799. **Применение функций Матье для расчета распределения поля в антенне по заданной диаграмме направленности. Пистолькорс А. А.,** Докл. АН СССР, 1953, **89**, № 5, 849—852

Пусть в безграничном плоском идеально проводящем экране прорезана бесконечно длинная щель шириной d, являющаяся раскрывом антенны. Если d принять за фокусное расстояние эллиптической системы координат, то электрическое поле в любой точке полупространства может быть представлено рядом

$$E = \sum_{p=1}^{\infty} g_p\, Hs_p^{(2)}(h, \zeta)\, se_p(h, \eta),$$

где $Hs_p^{(2)}(h, \zeta)$ — нечетные функции Матье — Ганкеля второго рода, $se_p(h, \eta)$ — нечетные функции Матье, g_p — постоянные коэффициенты, $h = kd/4$, k — волновое число. Из асимптотических представлений функций $Hs_p^{(2)}(h, \zeta)$ при больших ζ следует, что

$$f(\eta) = \sum_{p=1}^{\infty} i^p g_p se_p(h, \eta),$$

где $f(\eta)$ — диаграмма направленности. Следовательно, для того чтобы найти электрическое поле в раскрыве антенны, достаточно знать разложение диаграммы направленности в ряд по функциям Матье параметра h. Последнее разложение можно получить из ряда Фурье для $f(\eta)$.

Приведен пример применения метода для расчета электрического поля в раскрыве антенны, необходимого для воспроизведения заданной диаграммы направленности. *П. П. Бирюлин*

800. **Одно характеристическое свойство уравнений упругости. Сбрана** (Una proprietà caratteristica delle equazioni dell'elasticità. Sbrana Francesco), Atti Accad. Ligure, 1952, **9**, 84—88 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Используя тождество Тедоне (Tedone) и теорему о среднем для гармонических функций, автор получает простое и изящное доказательство следующей теоремы о среднем для классической статической теории упругости. Пусть Σ — сфера радиуса R с центром в P, Q — точка на Σ и пусть Rn_i — вектор из P в Q. Положим

$$H_{ij} = \frac{3}{6+2q}[(2-q)\,\delta_{ij} + 5qn_in_j].$$

Тогда, для того чтобы в некоторой окрестности s_i удовлетворяли статическому уравнению Навье для изотропного тела с $q = 1 + \lambda/\mu$, необходимо и достаточно, чтобы

$$4\pi R^2 s_i = \oint_{\Sigma} H_{ij}s_j\,dS$$

для всех сфер Σ в окрестности.

Необходимость подобной формулы с другим тензором H_{ij} была недавно доказана Акуаро (Aquaro Riv. mat. Univ. Parma, 1950, **1**, 419—424; Rend. Seminar Fac. sci. Univ. Cagliari, 1952, **21**, 43—46). Было бы интересно установить связь между этими результатами. *C. Truesdell*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 179.

801. **Оценки для решений краевых задач теории упругости. Васидзу** (Bounds for solutions of boundary value problems in elasticity. Washizu K.), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 2—3, 117—128 (англ.)

Использован метод геометрического представления в функциональном пространстве с положительно определенной метрикой, предложенный Прагером и Синджем (Prager W., Synge J. L., Quart. Appl. Math., 1947, **5**, 241). Следуя Диацу и Гринбергу (Diaz J. B., Greenberg H. J., J. Math. and Phys., 1948, **27**, 193; Quart. Appl. Math., 1948, **6**, 326), получившим оценки для первой бигармонической задачи и первой краевой задачи теории упругости, автор выводит формулы, дающие оценки решений для двух- и трехмерных задач теории упругости, изгиба пластинок и кручения стержней. В эти формулы входят две вспомогательные функции, из которых одна должна удовлетворять уравнениям равновесия и краевым условиям для напряжений, а другая — уравнениям сплошности и краевым условиям для смещений.

Отмечается трудность определения указанных функций; путь для преодоления этой трудности не намечен. *Г. С. Шапиро*

802. **Задачи обобщенного плоско-напряженного состояния в бесконечном упругом слое. Тиффен** (Generalized plane stress problems in infinite elastic strips. Tiffen R.), Quart. p. Mech. and Appl. Math., 1953, **6**, № 3, 344—369 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 3416.

803. **О решении граничных задач теории оболочек. Векуа И. Н.,** Сообщ. АН ГрузССР, 1954, **15**, № 1, 3—6

При помощи тензора Грина для системы уравнений обобщенного плоского напряженного состояния и уравнения изгиба пластинки автор сводит систему уравнений равновесия оболочек с закрепленной границей (см., например, Векуа И. Н., Докл. АН СССР, 1949, **68**, № 3, 453—455) к эквивалентной системе интегральных уравнений. Эта система в случае достаточно пологих оболочек может быть решена путем последовательных приближений. Каждое при-

лижение (что важно) является решением соответствующей задачи плоского напряженного состояния и изгиба пластинки. Таким образом, решение раничной задачи теории оболочек сводится к решению соответствующей граничной задачи плоской теории упругости и изгиба пластинки.

В заключение автор указывает на возможные бобщения этого метода для других граничных словий. *С. А. Терсенов*

04. К теории изгиба пластинок со многими грибами. Мюллер (Beitrag zur Biegungstheorie der Mehrpilzplatte. Müller W.), Österr. Ingr-Arch., 1954, 8, № 1, 1—10 (нем.; резюме англ., франц.)

Рассматривается поперечно равномерно нагруженная прямоугольная пластинка, свободно опирающаяся на k^2 тонких колонн, расположенных имметрично относительно средних линий пластинки.

Сначала рассматриваются прямоугольные опорные поверхности, потом — предельный случай, когда ти прямоугольники стягиваются в точки.

Для вычисления величины прогиба и изгибающих моментов используется разложение в ряды по обственным функциям. Изучаются пластинки, которых 1, 4, 9, 16 опорных точек, рассматривается акже пластинка с 8 опорными точками. Для случая четного и нечётного k выводятся отдельные ормулы. *В. С. Жгенти*

05. О равновесии бесконечной пластины в форме полосы, заделанной и опертой. Ландолино (Sull'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia, incastrata e appoggiata. Landolino Giuliano), Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1952, 6, № 3—4, 147—171 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Задача сводится к интегрированию уравнения $-\Delta\Delta u = f(x, y)$ в полосе S $(0 < x < 1, -\infty < y < \infty)$ ри краевых условиях

$$u(0, y) = u(1, y) = u_x(1, y) = u_{xx}(0, y) = 0.$$

бозначая через $u^*(x, \lambda)$ и $f^*(x, \lambda)$ преобразования урье функций $u(x, y)$ и $f(x, y)$, автор находит

$$u^*(x, \lambda) = \frac{1}{4}\int_0^1 H(x, \xi, \lambda) f^*(\xi, \lambda)\, d\xi,$$

де H — мероморфная функция от λ, полюсы которой совпадают с отличными от нуля корнями уравнения

$$\operatorname{sh} 2\lambda = 2\lambda. \qquad (1)$$

Если полученная таким образом функция допускает преобразование Фурье, то решение задачи ается формулой

$$u(x, y) = \frac{1}{8\pi}\iint_S G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \qquad (2)$$

де $$G = \overset{*}{\int_{-\infty}^{+\infty}} H(x, \xi, \lambda) e^{i\lambda(y-\eta)}\, d\lambda;$$

вездочка — символ главного значения интеграла.

Отмечается, что $G(x, y, \xi, \eta) = G(\xi, \eta, x, y)$.

Корни уравнения (1) имеют вид $\lambda_n = \pm\frac{\alpha_n}{2} \pm i\frac{\beta_n}{2}$, где $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$. Как утверждает автор, можно занумеровать корни λ_n так, чтобы α_n и β_n возрастали вместе с n. Устанавливаются асимптотические формулы

$$\alpha_n \approx \operatorname{Arch}\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \beta_n \approx \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Доказывается, что: 1) G, G_x, G_y непрерывны при $0 \leqslant x, \xi \leqslant 1$, $-\infty < y, \eta < +\infty$; 2) производные от G по x и y второго, третьего и четвертого порядков непрерывны как в области $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $-\infty < y, \eta < \infty$, так и в области $0 < x < 1$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $-\infty < y, \eta < +\infty$, если только $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \neq 0$; 3) вблизи точки $x=\xi$, $y=\eta$, с точностью до непрерывных слагаемых,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] + \frac{2(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{2(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] - \frac{2(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2};$$

главные части третьих и четвертых производных получаются дифференцированием главных частей вторых производных от G; 4) как функция от x и y величина G удовлетворяет уравнению $\Delta\Delta G = 0$ и краевым условиям задачи; 5) функции $e^{\frac{\beta_1}{2}(y-\eta)} G$, $e^{\frac{\beta_1}{2}(y-\eta)} G_x$, $e^{\frac{\beta_1}{2}(y-\eta)} G_y$ ограничены в полосе.

Устанавливается достаточное условие существования решения, именно формула (2) решает поставленную задачу, если $f(x, y)$ удовлетворяет следующим требованиям: 1) она определена в полосе S и удовлетворяет условию Гельдера, так что $|f(P) - f(Q)| < M \cdot \overline{PQ}^{\alpha}$, если только $\overline{PQ} < d$, где M, α, d — положительные постоянные; 2) функция $e^{-\frac{\beta_1}{2}|y|} f(x, y)$ абсолютно интегрируема в S. *С. Г. Михлин*

806. О напряжениях, возникающих в однородном брусе с небольшим сферическим включением, под действием постоянного изгибающего момента. Дас (On the stresses due to a small spherical inclusion in a uniform beam under constant bending moment. Das Sisir Chandra), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, 45, № 2, 55—63 (англ.)

Однородный брус подвергается действию изгибающего момента. На оси бруса расположен центр сферического включения из другого материала. Интегрируются уравнения Ляме в сферических координатах при условии, что на границе сферического включения напряжения не терпят разрыва. Первоначально определяются компоненты вихря вектора смещения, а затем находится вектор смещения и по нему тензор напряжений. Все указанные величины определяются через функции Лежандра и их

производные. Даются численные значения для некоторых характерных случаев. *И. С. Аржаных*

807. Изгиб поперечной силой эллиптического бруса, ослабленного продольно круговой цилиндрической полостью. Шерман Д. И., Инженерный сб., 1953, **17**, 121—150

Рассмотрена задача о поперечном изгибе цилиндрического бруса (консоли), сечение которого имеет форму эллипса с симметрично проведенным круговым отверстием. Изгибающая сила предполагается приложенной в центре свободного основания и направленной вдоль большой полуоси эллипса. В этом случае кручение отсутствует и напряжения могут быть выражены при помощи одной функции, гармонической в области S поперечного сечения бруса. Принимая ее с обратным знаком за мнимую часть некоторой регулярной в области S функции $G_1(z)$, автор выписывает для последней граничные условия:

$$G_1(t) + \overline{G_1(t)} = f_j(t) + C_j \text{ на } L_j \ (j = 1, 2). \quad (1)$$

Здесь t — аффикс точки кривой L_j и

$$f_j(t) = -(2 - \nu)\frac{y^3}{3} - \nu x^2 y + 4(1 + \nu)\int xy\,dx. \quad (2)$$

Заключающийся в правой части (2) интеграл берется по отрезку кривой L_j (L_1 — эллипс, L_2 — окружность).

Обозначив

$$G_1(t) - \overline{G_1(t)} = 2\omega(t) \text{ на } L_2,$$

автор вводит функцию $G(z)$

$$G(z) = G_1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\omega(t)}{t - z}\,dt - iA^3\left\{d_3\left(\frac{R}{z}\right)^3 + d_1\left(\frac{R}{z}\right)\right\},$$

регулярную внутри эллипса. Эта функция ищется в виде

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\chi(t)}{t - z}\,dt + iC$$

при вещественной плотности $\chi(t)$ и вещественной же постоянной C. Представив функцию $\chi(t)$ в виде некоторого ряда, автор для нахождения неизвестных коэффициентов получает бесконечную систему алгебраических линейных уравнений.

В статье приведены численные примеры, иллюстрирующие эффективность метода.

В. И. Моссаковский

808. К задаче о стягивании контура нефтеносности. Тумашев Г. Г., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, **113**, № 10, 133—137

Рассмотрена следующая задача: деформирующийся замкнутый контур L задан уравнением $F(x, y, t) = 0$. Область, внешняя к нему, обозначена G_1, внутренняя — G_2. Требуется определить гармоническую функцию Φ, удовлетворяющую условиям:

а) в заданных точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$ области G_2 и в бесконечно удаленной точке функция Φ имеет логарифмические особенности;

б) на контуре L внешние и внутренние значения функции Φ и ее нормальной производной связаны соотношениями

$$\Phi^- = \Phi^+, \quad (1)$$

$$C_1\frac{\partial\Phi^-}{\partial n} = C_2\frac{\partial\Phi^+}{\partial n}, \quad (2)$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Задача эта вытекает из задачи управления перемещением контура нефтеносности, поставленной Г. С. Салеховым. Φ — гидродинамическое давление в пласте, C_1 и C_2 — коэффициенты фильтрации воды и нефти.

Автор ищет решение в виде суммы

$$\Phi = f + V + W, \quad (3)$$

где

$$f = \begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{2\pi C_2}\ln|z - z_i| & \text{при } z \in G_2,\\ 0 & \text{при } z \in G_1,\end{cases}$$

V и W — потенциалы простого и двойного слоев, непрерывно распределенных по L.

Полученное решение в общем случае не удовлетворяет краевому условию (2).

(Причина этого в том, что как в формулировке задачи, так и при выборе решения в форме (3) искомая функция Φ предполагается гармонической всюду вне контура L, за исключением лишь бесконечно удаленной точки. Определение Φ внутри L сводится к задаче Неймана, а вне L — к задаче Коши для уравнения Лапласа, которая, как известно, некорректна. При некоторых ограничениях на закон стягивания $F(x, y, t) = 0$ задача Коши имеет единственное непрерывное решение в окрестности L, но, вообще говоря, вид решения наперед задан быть не может. В рассмотренном примере функция Φ действительно гармонична вне L по всей конечной части плоскости, однако пример этот нетипичен для метода автора, так как в нем $W \equiv 0$. *Прим. реф.*)

Далее рассмотрена задача определения давления Φ_1 в плоском пласте, состоящем из двух частей G_1' и G_2' с различными проницаемостями k_1 и k_2. В этом случае на границе L' областей G_1' и G_2', лежащей целиком в одной жидкости, функция Φ_1 удовлетворяет условиям

$$\Phi_1^+ = \Phi_1^-, \quad C_1'\frac{\partial\Phi_1^-}{\partial n} = C_2'\frac{\partial\Phi_1^+}{\partial n}$$

(C_1', C_2' — постоянные).

Решение Φ_1 отыскивается в виде $\Phi_1 = \Phi + V_1$, где Φ дается выражением (3), а $V_1 = \int_{L'}\rho_1\ln\frac{1}{r}\,ds$ — потенциал простого слоя, распределенного на L'. Для плотности ρ_1 получено интегральное уравнение. Здесь следует иметь в виду примечание относительно первой задачи.

О применении интегральных уравнений ко второй задаче для n областей в трехмерном случае см., например, работы А. И. Гусейнова (Прикл.

матем. и механика, 1948, 12, № 1, 103—108; Тр. н.-и. ин-та матем. и физики (Баку), 1949, 1, 3—10). *В. Л. Данилов*

809. О волновых движениях тяжелой жидкости. Хаскинд М. Д., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 1, 15—26

В первой части работы рассмотрена пространственная задача о колебаниях тел, плавающих на поверхности бесконечности глубокой взволнованной жидкости, потенциал скоростей которой имеет вид:

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)\, e^{i\sigma t} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Для гармонической функции φ в работе найдено новое выражение (1) через вспомогательную функцию f, связанную с φ соотношением $\frac{\partial \varphi}{\partial z} - k\varphi = \frac{\partial f}{\partial z}$,

$$\varphi = f + ke^{kz} \int_{+\infty}^{z} f(x, y, z)\, e^{-kz}\, dz + \frac{k}{4} ie^{kz} \iint_{S+\bar{S}} \left(\frac{\partial f}{\partial n} \chi - f \frac{\partial \chi}{\partial n} \right) dS + \varphi^*. \qquad (1)$$

Здесь σ — частота колебаний, k — волновое число,

$$\Phi^* = \varphi^* e^{i\sigma t} = \frac{ig}{\sigma} e^{i\sigma t} r_0 e^{kz - ik(x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon)}$$

— потенциал скоростей набегающей системы регулярных волн, $2r_0$ — их высота, ε — угол между фазовой скоростью и осью x, g — ускорение силы тяжести, S — поверхность тела, $\bar{S}$ — зеркальное отражение поверхности S в верхнем полупространстве, $\chi = e^{-kz} H_0^{(2)}(kr)$, где $H_0^{(2)}(kr)$ — функция Ганкеля второго рода и r — расстояние между точкой $P(x, y, z)$ и произвольной точкой области интегрирования.

Путем нахождения соответственных функций $f(x, y, z)$ решены задачи о пульсирующем источнике и вертикально плавающей пластинке.

Во второй части работы видоизмененным методом М. В. Келдыша для решения плоских задач о волновых движениях тяжелой жидкости решена задача об источнике, который движется с постоянной горизонтальной скоростью и одновременно пульсирует по гармоническому закону. Выявлено, что движущийся источник излучает четыре системы волн, характер которых проанализирован.

М. И. Гуревич

810. Околозвуковое обтекание клина с нулевым углом атаки. Триллинг (Transonic flow past a wedge at zero angle of attack. Trilling Leon), Z. angew. Math. und Phys., 1953, 4, № 5, 358—375 (англ.; резюме франц.)

Исследуется установившийся плоский поток идеального газа вокруг тонкого ромба, симметричный относительно его большой диагонали, причем скорости предполагаются близкими к скорости звука, но меньшими ее, за исключением ограниченных областей сверхзвуковых скоростей за вершинами малой диагонали, образование которых установлено экспериментально. Поток можно считать изэнтропическим. В фазовой плоскости безразмерных отклонений скоростей u', v' от скоростей невозмущенного потока уравнения движения имеют вид

$$u' \frac{\partial y}{\partial v'} = \frac{\partial x}{\partial u'}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u'} = \frac{\partial x}{\partial v'}.$$

Ищется их решение, удовлетворяющее следующим условиям:

1) в точке $A(u_1', 0)$, где $u_1' < 0$ — значение u', соответствующее невозмущенному потоку, x обращается в бесконечность и y также имеет определенную особенность;

2) если длину большой диагонали ромба считать равной 2, то при $u' \to -\infty$ $x \to \pm 1$;

3) $y = 0$ на полупрямых $v' = v_0'$, $u' < 0$; $v' = +0$, $u' < u_1'$; $v' = -v_0'$, $u' < 0$, где v_0' — значение v' в точках стороны ромба, встречающей поток (v_0' пропорционально длине малой диагонали $2t \ll 1$);

4) $x = 0$ и $y = 0$ на характеристике

$$v' = v_0' - \frac{2}{3} u'^{\frac{3}{2}}, \quad |v'| < v_0'.$$

Известные решения уравнения Трикоми, содержащие бесселевы функции порядков $^1/_3$ и $^2/_3$ или гипергеометрические функции, используются для построения решения

$$y = (v_0')^{-\frac{1}{3}} \left[Ay_{s_c} + y_{st_c} + z^{\frac{1}{3}} \sum_1^\infty K_{\frac{1}{3}}(n\pi z) \times \{a_n \cos n\pi v + b_n \sin n\pi v\} + z^{\frac{1}{3}} \int_0^\infty \left\{ \frac{\operatorname{ch}\lambda v}{\operatorname{ch}\lambda} G(\lambda) + \frac{\operatorname{sh}\lambda(1 - |v|)}{\operatorname{sh}\lambda} F(\lambda) \right\} \times \{J_{\frac{1}{3}}(\lambda z) + J_{-\frac{1}{3}}(\lambda z)\}\, d\lambda \right],$$

$$x = Ax_{s_c} + x_{st_c} + z^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \sum_1^\infty K_{\frac{2}{3}}(n\pi z) \times \{b_n \cos n\pi v + a_n \sin n\pi v\} + z^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \int_0^\infty \left\{ \frac{\operatorname{sh}\lambda v}{\operatorname{ch}\lambda} G(\lambda) \mp \frac{\operatorname{ch}\lambda(1 - |v|)}{\operatorname{sh}\lambda} F(\lambda) \right\} \times \{J_{-\frac{2}{3}}(\lambda z) - J_{\frac{2}{3}}(\lambda z)\}\, d\lambda.$$

Здесь

$$z = \frac{2}{3} \frac{(-u')^{\frac{3}{2}}}{v_0'}, \qquad v = \frac{v'}{v_0'},$$

$$y_{s_c} = \int_0^\infty \Phi_s(\lambda, z) \frac{\operatorname{sh}\lambda(1 - |v|)}{\operatorname{ch}\lambda} d\lambda,$$

$$x_{s_c} = \pm \int_0^\infty \Psi_s(\lambda, z) \frac{\operatorname{ch}\lambda(1 - |v|)}{\operatorname{ch}\lambda} d\lambda$$

(сингулярная часть решения с нужной особенностью в точке A, удовлетворяющая условию 3) на полупрямых $v = \pm 1$),

$$\Phi_s(\lambda, z) = z^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{\sin \lambda z_1}{\sqrt{3}} [J_{\frac{1}{3}}(\lambda z) + J_{-\frac{1}{3}}(\lambda z)] - \right.$$
$$\left. - \cos \lambda z_1 [J_{\frac{1}{3}}(\lambda z) - J_{-\frac{1}{3}}(\lambda z)] \right\},$$

$$\Psi_s(\lambda, z) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}} \left\{ \cos \lambda z_1 [J_{-\frac{2}{3}}(\lambda z) + J_{\frac{2}{3}}(\lambda z)] - \right.$$
$$\left. - \frac{\sin \lambda z_1}{\sqrt{3}} [J_{-\frac{2}{3}}(\lambda z) - J_{\frac{2}{3}}(\lambda z)] \right\},$$

где $$z_1 = \frac{2}{3} \frac{(-u_1')^{\frac{3}{2}}}{v_0'},$$

и $$y_{st_c} = \int_0^\infty \Phi_{st}(\lambda, z) \frac{\operatorname{sh} \lambda (1 - |v|)}{\operatorname{ch} \lambda} d\lambda,$$

$$x_{st_c} = \pm \int_0^\infty \Psi_{st}(\lambda, z) \frac{\operatorname{ch} \lambda (1 - |v|)}{\operatorname{ch} \lambda} d\lambda$$

(часть решения, удовлетворяющая условию 2) и условию 3) на полупрямых $v = \pm 1$),

$$\Phi_{st}(\lambda, z) = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{6}} \frac{z^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2} \cos \lambda z_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \lambda z_1\right] J_{-\frac{1}{3}}(\lambda z) \lambda^{-\frac{1}{3}},$$

$$\Psi_{st}(\lambda, z) = -2^{\frac{1}{3}} \frac{z^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2} \cos \lambda z_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \lambda z_1\right] J_{\frac{2}{3}}(\lambda z) \lambda^{-\frac{1}{3}}.$$

Далее, $$G(\lambda) = -\sum_1^\infty \frac{a_{2n} \lambda}{\lambda^2 + 4n^2\pi^2},$$

а $F(\lambda)$ выбирается так, чтобы условие 3) выполнялось при $v = \pm 0$; $F(\lambda)$ удовлетворяет некоторому интегральному уравнению, причем

$$F(\lambda) \approx -\frac{\pi}{2} \frac{\lambda \sin \lambda z_1}{1 + \lambda^{\frac{8}{2}}}.$$

Коэффициенты ряда определяются из условия 4), а постоянная A — из условия $x(0, 1) = 0$. Для коэффициентов a_n получается линейная система бесконечного порядка, причем $a_{2n-1} = 0$; утверждается, что a_{2n} быстро убывают.

Приводятся примеры приближенных расчетов потока, в частности формы сверхзвуковой области при разных значениях коэффициента подобия

$$\xi_0 = -\left(\frac{3}{2} z_1\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Библиография, 11 названий (1950—1952 гг.).

В. И. Левин

811. Изменение температуры при малых установившихся возмущениях потока сжимаемой жидкости. Р а й (Variation of temperature due to small steady disturbances in a compressible flow. R a y M.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, 45, № 2, 45—49 (англ.)

Рассматриваются малые возмущения бесконечного потока жидкости постоянной температуры и постоянной скорости V_0. Жидкость считается сжимаемой и обладающей конечной теплопроводностью. Допускается также, что все функции не зависят от z и давление остается постоянным.

Пренебрегая квадратами и произведениями малых величин, уравнение непрерывности можно записать следующим образом:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + V_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

и уравнения движения:

$$\rho_0 V_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) -$$
$$- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\rho_0 V_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) -$$
$$- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

где $V_0 + u$, v — компоненты возмущенной скорости, $\rho + \rho_0$ — возмущенная плотность, μ — коэффициент вязкости, который считается переменным.

Закон сохранения энергии записывается через изменение энтальпии i:

$$\sigma \rho_0 V_0 \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial i}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial i}{\partial y}\right),$$

где σ — число Прандтля, которое считается постоянным. Полученная система уравнений решается в предположении, что $v = 0$, $i = i(u)$, а также, что $\mu \frac{\partial u}{\partial x}$ и $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ есть линейные функции единственного аргумента u.

Ю. Н. Днестровский

812. Вычисление энергетических уровней кристалла алмаза. Ц е л е р (Die Berechnung der Energiebänder im Diamantkristall. Z e h l e r V.), Ann. Physik, 1953, **13**, № 1—5, 229—252 (нем.)

Задача состоит в отыскании спектра собственных значений E уравнения Шредингера

$$-\Delta u + 2Vu = 2Eu \qquad (1)$$

(уравнение записано в атомарных единицах).

Автор рассматривает два приближенных метода решения поставленной задачи. Первый из них состоит в следующем. Кристалл разбивается на элементарные ячейки. Внутри каждой ячейки выражение для функции u записывается в виде

$$u = \sum_{n,\,m} A_{n,\,m}\, Y_n^m(\theta, \varphi)\, R_n(\rho, E), \qquad (2)$$

что возможно, если предположить сферическую симметрию потенциальной энергии внутри ячеек относительно их центра. Беря конечное число слагаемых ряда (2) и требуя непрерывности таких выражений в некоторых точках границы двух соседних ячеек, автор получает возможность найти приближенно спектр энергетических уровней и определить коэффициенты $A_{n,\,m}$. (Добиться непрерывности вдоль всей границы при помощи конечного числа слагаемых, разумеется, нельзя, поэтому непрерывность заменяется такой «приближенной непрерывностью».)

Изложенный выше метод назван автором методом ячеек. Кроме него, автор применяет вариационный метод. Ищется экстремум функционала

$$F[u] = (\operatorname{grad} u)^2 + 2Vu^2$$

при дополнительном интегральном условии

$$\iiint u^2\, d\tau = 1.$$

При помощи обоих методов в работе делаются некоторые числовые расчеты. *Д. П. Костомаров*

813. Метод не зависящих от времени решений для радиоактивного распада и ядерной продукции. **Голд** (Method of time-free solutions for radioactive decay and radionuclide production. Gold Louis), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 1, 88—90 (англ.)

Решается система уравнений радиоактивной цепи

$$\begin{aligned} -dN_1/dt &= \lambda_1 N_1, \\ -dN_2/dt &= \lambda_2 N_2 - \lambda_1 N_1, \\ -dN_3/dt &= \lambda_3 N_3 - \lambda_2 N_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -dN_n/dt &= \lambda_n N_n - \lambda_{n-1} N_{n-1} \end{aligned}$$

(все λ_i считаются различными) при начальном условии $N_1 = N_0$, $N_2 = N_3 = \ldots = N_n = 0$ для $t = 0$. При этом во всех уравнениях системы, начиная со второго, за независимую переменную принимается N_1, в результате чего все величины N_i/N_0 ($i = 2, \ldots, n$) получаются последовательно в явном виде как линейные комбинации степеней N_1/N_0. Аналогичные результаты получаются при исследовании ядерной продукции, когда первое из уравнений системы и первое из равенств в начальном условии заменяются соответственно на $-dN_1/dt = \lambda_1 N_1 - P$ и $N_1 = 0$. *А. Д. Мышкис*

814. Упругие оболочки, близкие к плоским пластинам. **Михлин С. Г.**, В кн.: Вопросы прочности лопасти водяной турбины, Изд-во ЛГУ, Л., 1954, 5—92

Работа посвящена расчету напряжений в лопасти гидравлической турбины. Эта лопасть представляет собой оболочку переменной толщины, которую, как замечает автор, можно рассматривать как относительно слабо изогнутую пластину; автор считает, что срединная поверхность лопасти есть часть поверхности прямого геликоида. Расчет напряжений в оболочке столь сложного типа связан с большими вычислительными трудностями, поэтому в работе используется то обстоятельство, что оболочка слабо изогнута и можно рассчитать ее как плоскую пластину переменной толщины.

В связи с этим исследуется общий вопрос о погрешности, которая возникает, если при определении напряжений заменить оболочку плоской пластиной, в некотором смысле близкой к данной оболочке.

Автор в § 10 решает более общую задачу о погрешности в решении уравнения, которая возникает при замене данного оператора другим, близким ему в некотором смысле. Полученные результаты применяются в § 11, где выводится оценка относительной погрешности в среднем при определении напряжений, если для их расчета оболочка S заменяется близкой к ней плоской пластиной S^0. В §§ 15—16 рассматривается оболочка, срединная поверхность S которой есть часть прямого геликоида.

Ряд параграфов посвящен общей теории оболочек. Развитый прием оценки погрешности, как замечает автор, может быть применен также и к другим задачам математической физики. Для иллюстрации автор в § 18 рассматривает задачу Неймана для самосопряженного эллиптического уравнения.

Основные результаты этой работы опубликованы уже в других статьях автора (Докл. АН СССР, 1952, **84**, № 5, 909—912; Прикл. матем. механика, 1952, **16**, № 4, 309—418). *В. С. Жгенти*

815. Невозможность трансзвукового потенциального течения. **Буземан** (The nonexistence of transonic potential flow. Busemann Adolf), Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, **4**, Fluid dynamics, 29—39 pp., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York — Toronto — London, 1953 (англ.)

Рассматривается вопрос о невозможности непрерывного потенциального течения при трансзвуковом режиме.

Целью автора, повидимому, является указание типа краевых задач, которые можно поставить в смешанной области и сравнить с классическими задачами, рассматриваемыми в эллиптической или гиперболической полуплоскости.

Весь анализ основывается на изучении поведения решений уравнения

$$\psi_{ww} + t(w)\, \psi_{\theta\theta} = 0$$

с разделяющимися переменными в полосе (w_1, w_2) и на качественном описании изменений решений при деформации контура полосы, находящегося в гиперболической области.

Автор подчеркивает, что на контуре, расположенном в гиперболической области, необходимо поместить «клапан» и что невозможно корректно поставить задачу в смешанной области, задавая значение неизвестной функции вдоль всего замкнутого контура. *P. Germain*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 176.

816. **Пример трансзвукового потока для газа Трикоми. Мартин, Тикстан** (An example of transonic flow for the Tricomi gas. Martin M. H., Thickstun W. R., Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 4, Fluid dynamics, 61—73 pp., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York — Toronto — London, 1953, 7.00 doll.) (англ.)

Рассматривается пример течения в сопле Лаваля в окрестности переходной линии, когда жидкость переходит от дозвукового к сверхзвуковому режиму. Используется приближение Трикоми, требуется найти решение уравнения Трикоми, принимающее одно значение вне области, ограниченной двумя характеристиками, пересекающимися в точке на звуковой линии, и три значения внутри той же области. Решение, изучаемое авторами, не ново, но исследование свойств фиктивного газа, приводящего к уравнению Трикоми, и структуры полученного потока в физической плоскости проделано весьма тщательно. В частности, показано, что звуковая линия имеет две точки закручивания, аналогичные особым точкам спирали Корню. *P. Germain*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 176.

817 К. **Некоторые задачи аэродинамики и строительной техники, связанные с собственными значениями. Фрейзер** (Some problems in aerodynamics and structural engineering related to eigenvalues. Fraser R. A., Simultaneous linear equations and the determination of eigenvalues, 65—74 pp., National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, № 29), U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1953, 1.50 doll.) (англ.)

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 164.

818 Д. **Исследование бортовой качки судов на волнении. Павленко В. Г.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Горьковск. ин-т инж. водн. трансп., Горький, 1954

См. также: 558 К, 682, 700, 964, 965, 967

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

819. **О бесконечно близких интегралах систем рекуррентных интегродифференциальных уравнений в нормальной форме. Жерме** (Sur les intégrales infiniment voisines des systèmes d'équations intégro-différentielles récurrentes de forme normale. Germay R. H.), Bull. Soc. roy. Sci., Liège, 1953, **22**, 198—210 (франц.)

Цель этой заметки — распространить на системы рекуррентных интегро-дифференциальных уравнений результаты, доказанные автором для отдельных уравнений того же вида (Bull. Soc. roy sci., Liège, 1953, **22**, 64—76; РЖМат, 1953, 1184). *J. A. Barnett*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 232.

820. **Применение теории Фредгольма к рассеянию в заданном поле, зависящем от времени. Салам, Маттьюс** (Fredholm theory of scattering in a given time-dependent field. Salam Abdus, Matthews P. T.), Phys. Rev., 1953, **90**, № 4, 690—695 (англ.)

Теория интегральных уравнений Фредгольма используется для решения задачи о рассеянии электрона во внешнем электромагнитном поле и, в частности, для рассмотрения вопроса в теории возмущений о сходимости ряда по степеням внешнего поля. Электронно-позитронное поле считается вторично квантованным. Амплитуда перехода $(p \mid S \mid q)$ электрона из состояния $u(q)$ в состояние $\bar{u}(p)$ записывается в виде

$$(p \mid S \mid q) = (0 \mid S \mid 0)\, \bar{u}(p)\, M(p, q)\, u(q),$$

(где $(0 \mid S \mid 0)$ — среднее по вакууму от S-матрицы вероятность вакууму остаться вакуумом, отличная от единицы в случае внешнего поля, зависящего от времени), а функция Грина $M(p, q)$ удовлетворяет уравнению типа Фредгольма:

$$M(p, q) = \lambda \mathbf{A}^e(p - q) -$$

$$- 2\pi\lambda \int \mathbf{A}^e(p - k)\, S_F(k)\, M(k, q)\, d^4k$$

($\mathbf{A}^e = \mathbf{A}^e_\mu \gamma_\mu$ — внешнее поле). Решение интегрального уравнения Фредгольма

$$x(s) = y(s) + \lambda \int K(s, t)\, x(t)\, dt$$

берется в форме, развитой Смитисом (Smithies F., Duke Math. J., 1941, 8, 107). Устанавливается, что амплитуда рассеяния $(p \mid S \mid q)$ описывается всюду сходящимся рядом по λ при некоторых ограничениях, наложенных на внешнее поле $\mathbf{A}^e(k)$. Именно $\mathbf{A}^e(k)$ должно убывать на бесконечности быстрее, чем k^{-3}. В случае постоянного поля, когда это условие не выполняется, ряд может расходиться. *Б. Л. И.*

821 Д. **Аналитические методы разыскания решений некоторых нелинейных интегральных и интегродифференциальных уравнений, а также уравнений с ядром, зависящим от параметра. Лобачев С. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

См. также: 625, 753, 758, 764 К, 808

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

822. **Двумерные задачи вариационного исчисления в непараметрической форме, преобразованные к параметрической форме.** Сигалов А. Г., Матем. сб., 1954, 34(76), № 3, 385—406

Развернутые доказательства результатов, опубликованных в другой статье автора (РЖМат, 1954, 5146). *Г. И. Шилова*

823. **О наибольшем значении интеграла при дополнительных условиях.** Эмерсон (On maximizing an integral with a side condition. Emerson R. C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 291—295 (англ.)

Рассматривается вопрос о существовании абсолютного максимума интеграла

$$J(p) = \int_E F(p(x), x)\,dx \qquad (1)$$

в предположении, что допустимые функции p, составляющие класс P, удовлетворяют условиям: 1) $u(x) \leqslant p(x) \leqslant v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывные функции при $x \in E$;

$$2)\ G(p) = \int_E G(p(x), x)\,dx = c.$$

Доказывается следующая теорема:

Пусть а) E — компактное подмножество действительных чисел, б) $F(p, x)$, $G(p, x)$ непрерывны при $x \in E$ и $u(x) \leqslant p \leqslant v(x)$, в) $\inf\limits_{p \in P} G(p) < c < \sup\limits_{p \in P} G(p)$.

Тогда существуют число θ_c в открытом интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ и допустимая функция $M_{\theta_c}(x)$ такие, что для всех $x \in E$ удовлетворяется равенство

$$\cos\theta_c F\left(M_{\theta_c}, x\right) + \sin\theta_c G\left(M_{\theta_c}, x\right) =$$

$$= \max_{u(x) \leqslant M \leqslant v(x)} \left[\cos\theta_c F(M, x) + \sin\theta_c G(M, x)\right]$$

и $M_{\theta_c}(x)$ даёт интегралу (1) абсолютный максимум в классе всех допустимых функций. *Г. И. Шилова*

824. **Новое доказательство существования минимума одного классического интеграла.** Бертолини (A new proof of the existence of the minimum for a classical integral. Bertolini Fernando), Compositio math., 1953, 11, № 1, 37—43 (англ.)

При условиях и обозначениях, указанных ранее (РЖМат, 1954, 4060), изучается проблема минимума функционала $I(L) = \int_L y^{1/n}\,ds$. В зависимости от расположения концов кривой L и знака n проблема подразделяется на частные случаи, из которых «тривиальные» исследуются непосредственно, а остальные с помощью сведения к общим теоремам о минимуме полунепрерывных снизу функционалов в метрическом пространстве. *С. М. Лозинский*

825. **Критические точки функционала.** Деёвель (Points critiques d'une fonctionnelle. Deheuvels René), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 19, 1847—1849 (франц.)

Реферируемая работа является продолжением предыдущих работ автора (C. r. Acad. sci., 1952, 235, 778—780, 858—860, 929—931, 1270—1272), обобщающих теорию критических точек Морса (Morse M., The calculus of variations in the large, New York, 1934; Functional topology and abstract variational theory, Paris, 1939) при помощи понятий теории гомологий Лере (Leray J., J. Math., 1950, 29, 1—139, 169—213; РЖМат, 1953, 127).

Пусть $\mathfrak{A}$ — дифференциальное градуированное кольцо с дифференциалом δ и инволюцией a, снабженное некоторой вещественной сепарабельной оценкой f (определение вещественной, т. е. принимающей любые вещественные значения, оценки аналогично определению целочисленной оценки (РЖМат, 1953, 127) и отличается от него лишь одним дополнительным условием $f(a, b) \geqslant \max[f(a) f(b)]$; сепарабельность оценки означает, что из $f(a) = \infty$ следует $a = 0$).

Пусть $\mathfrak{S}_s^q$ — подкольцо таких элементов a из $\mathfrak{A}$, что $f(a) > q$, $f(\delta a) > s$; положим $\mathfrak{D}_q^s = \delta\mathfrak{S}_s^q$. Пусть $R' = R \cup \infty$ — множество вещественных чисел R, упорядоченное естественным образом и снабженное последним элементом (это множество является областью значений оценок). Обозначим через $R'^{\{4\}}$ множество всех систем $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $v_i \in R'$, $v_1 \leqslant v_2 \leqslant v_3 \leqslant v_4$, упорядоченное по следующему правилу: $v \leqslant v'$, если $v_i \leqslant v_i'$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Следующие кольца, зависящие от $v = (p, q, r, s) \in R'^{\{4\}}$, называются гомологическими частными (quotients d'homologie):

$$E(v) = E(p, q, r, s) = \mathfrak{S}_s^q \Big/ \left(\mathfrak{S}_s^r + \mathfrak{D}_p^q\right),$$

$$\mathfrak{D}(v) = \mathfrak{D}(p, q, r, s) = \mathfrak{D}_p^r \Big/ \left(\mathfrak{D}_p^s + \mathfrak{D}_q^r\right).$$

Обозначим через R'' множество, получаемое из R' посредством добавления к каждому элементу $p \in R'$ «ближайшего предшествующего» $p - 0$; R'' естественным образом получает упорядочение и топологию. Образуем упорядоченное множество $R''^{\{4\}}$ четверок из R'', аналогичное $R'^{\{4\}}$; $R''^{\{4\}}$ также получает естественную топологию. Каждый элемент $w \in R''^{\{4\}}$ является пределом элементов v из $R'^{\{4\}}$, при этом гомологические частные (например, $E(v)$), соответствующие $v \to w$, образуют обратный спектр (système inverse) колец с гомоморфизмами, порожденными вложением в качестве проекций. Предельное кольцо спектра, по определению, есть гомологическое частное $E(w)$.

Положим $L^p = E(p - 0, p - 0, p, p)$; тогда L^p называется локальным кольцом кольца $\mathfrak{A}$ на уровне p (критическим, если $L^p \neq 0$), а прямая сумма $L = \Sigma_p L^p$ — локальным критическим кольцом кольца $\mathfrak{A}$. Градуировка кольца $\mathfrak{A}$ индуцирует градуировку колец L^p и L; обозначим через ${}^nL^p$ группу однородных элементов L^p степени n.

Пусть далее $\mathfrak{A}$ является кольцом сингулярных коцепей некоторого топологического пространства X над произвольным полем G. При помощи некоторой числовой функции φ, заданной в пространстве X, определим в кольце $\mathfrak{A}$ оценку f, положив $f(a) = \sup p$, где p пробегает все значения, для которых коцепь a обращается в нуль на сингулярных симплексах множества $(\varphi \leqslant p)$. Если для так определенной оценки ${}^nL^p \neq 0$, то p называется критическим значением функции φ порядка n.

Будем говорить, что на X задан пучок (faisceau) $\mathfrak{B}$, если каждому открытому множеству $Y \subset X$ поставлено в соответствие кольцо $B(Y)$, а каждой паре открытых множеств $Y \supset Y'$ — некоторый гомоморфизм кольца $B(Y)$ в кольцо $B(Y')$. Образ элемента $b_Y \in B(Y)$ при этом гомоморфизме обозначим через $Y' b_Y$ и назовем частью элемента b_Y на Y'. Требуется, чтобы были выполнены следующие условия: $B(\phi) = 0$ (ϕ — пустое множество); если $Y \supset Y' \supset Y''$, $b_Y \in B(Y)$, то $Y''(Y' b_Y) = Y'' b_Y$. Если все $B(Y)$ — дифференциальные (соответственно градуированные или снабженные оценкой) кольца и если все высечения (операции взятия части) суть допустимые гомоморфизмы (по отношению к оценке это означает, что $f_{Y'}(Y' b_Y) \geqslant f_Y(b_Y)$), то пучок $\mathfrak{B}$ называется дифференциальным (соответственно градуированным или снабженным оценкой). Носителем $S(b_Y)$ элемента $b_Y \in B(Y)$ называется множество таких точек $x \in Y$, что $V b_Y \neq 0$ для всякой окрестности $V \subset Y$ точки x. Пусть M — некоторое множество элементов b_Y (где Y могут быть различными); положим $S(M) = \bigcup_{b_Y \in M} S(b_Y)$ и назовем $S(M)$ носителем множества M; в частности, если M содержит все элементы b_Y пучка $\mathfrak{B}$, то $S(M)$ называется носителем пучка $\mathfrak{B}$ и обозначается через $S(\mathfrak{B})$.

В частности, дифференциальный градуированный пучок $\mathfrak{A}$ получим, ставя в соответствие каждому открытому множеству $Y \subset X$ кольцо $A(Y)$ сингулярных коцепей подпространства Y над полем G и определяя часть элемента $a_Y \in A(Y)$ так, как это принято в теории когомологий. Задание на пространстве X функции φ определяет оценки во всех кольцах $A(Y)$ и тем самым градуированные критические локальные кольца $\Lambda(Y)$, представимые в виде $\sum_{n,p} {}^nL^p(Y) (p \in R)$, где слагаемые однородны. Когда Y пробегает все открытые множества пространства X, кольца $\Lambda(Y)$ образуют пучок Λ, называемый критическим локальным пучком функции φ. Отбирая все соответствующие этому пучку элементы b_Y с фиксированными n и p, но со всевозможными Y, получаем множество ${}^n\Lambda^p$. Точки $x \in S(\Lambda)$ называются критическими точками функции φ; точки $x \in S({}^n\Lambda^p)$ называются критическими точками индекса n со значением p. При этом (чисто гомологическом) определении критических точек справедлива следующая теорема:

Пусть p — критическое значение порядка n функции φ на пространстве X. Если множества $(\varphi \leqslant p + e)$ компактны при $0 < e < e_0$, то существует по крайней мере одна критическая точка функции φ индекса не больше n со значением p.

Если функция φ непрерывна, то критические точки со значением p лежат в множестве $(\varphi = p)$.

Эту теорему можно рассматривать как обобщение известной теоремы о существовании минимума функционалов. *А. И. Фет*

См. также: 764 К

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

826. Основная теорема анализа. Гальперин (A fundamental theorem of the calculus. Halperin Israel), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 122—123 (англ.)

Доказывается следующая «ослабленная» теорема о среднем: Если $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$, то для некоторого $x_0 \in [a, b]$

$$|f'(x_0)| \geqslant |f(b) - f(a)| / |b - a|.$$

Доказательство годится и для функций, заданных на $[a, b]$ и принимающих значения в произвольном линейном нормированном пространстве.

А. А. Конюшков

827. Неравенства для нормального интеграла, включающие новую непрерывную дробь. Шентон (Inequalities for the normal integral including a new continued fraction. Shenton L. R.), Biometrika, 1954, **41**, № 1, 2, 177—189 (англ.)

Даются представления в виде непрерывных дробей для интегралов

$$R(t) = \int_t^\infty (g(x) / g(t))\, dx \text{ и } \overline{R}(t) = \int_0^t (g(x) / g(t))\, dx,$$

где $g(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$ и выводится ряд неравенств, вытекающих из этого представления.

В. П. Скитович

828. О максимуме и минимуме некоторых элементарных функций. Поццоло-Феррарис (Sul massimo e minimo di alcune funzioni elementari. Pozzolo Ferraris Giulia), Archimede, 1954, **6**, № 2, 73—77 (итал.)

Автор указывает способ нахождения экстремумов дробной рациональной функции второй степени посредством приведения ее к виду

$$Y = X + AX^{-1}.$$

Далее, с той же точки зрения рассматривается коническое сечение общего вида. *В. Л. Гончаров*

829. О вычислении определенных интегралов. Уэйнер (On the computation of definite in-

tegrals. Weiner L. M.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 4, 254—255 (англ.)

На примере интеграла $\int (1-x^2)^{-1/2}\,dx$ объясняется выбор ветви многозначной первообразной функции при интегрировании между постоянными пределами. *В. Л. Гончаров*

830. Формула Дирихле о перемене порядка интегрирования для обобщенных интегралов Стильтьеса. Пудовкин М. А., Тр. Казанск. хим.-технол. ин-та, 1952, № 17, 135—138

Автор устанавливает формулы Дирихле о перемене порядка интегрирования в двукратных интегралах с переменными верхними пределами. Вывод дан для частного вида подинтегральной функции, зависящей от разностей двух переменных.
В. Г. Челидзе

831. Обобщение интеграла, принадлежащего Харди. Рагаб (Generalisation of an integral due to Hardy. Ragab Fouad M.), Proc. Glasgow Math.Assoc., 1953, **1**, 115—117 (англ.)

Интегралы, содержащие E-функции. Рагаб (Integrals involving E-functions. Ragab Fouad M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953, **1**, 129—136 (англ.)

В первой из этих работ автор доказывает равенство

$$\prod_{s=1}^{p-1}\int_0^\infty K_n(t_s)\,t_s^{2s/p-1}\,dt_s K_n\left(\frac{b}{t_1t_2\cdots t_{p-1}}\right)=$$
$$=\pi^{p-1}\,K_{pn}\,(pb^{1/p})$$

и аналогичный результат для бесселевых функций первого рода, а во второй работе — соответствующий результат с заменой в подинтегральной функции $K_n(z)$ на $E(\alpha, \beta::z)$. *A. Erdélyi*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 218.

832. Два неравенства. Ватсон (Two inequalities. Watson G. N.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 322, 244—246 (англ.)

Доказывается:
1. Пусть n целое $\geqslant 2$,

$$D_n(x)=\begin{vmatrix} x^a & x^b & \cdots & x^h \\ a^{n-2} & b^{n-2} & \cdots & h^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & b & \cdots & h \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

где $a>b>\cdots>h$.

Тогда: а) $D_n(x)>0$, если $x>1$; б) $D_n(x)\times(-1)^{n-1}>0$, если $0<x<1$.

2. Неравенство Шура

$$x^\mu(x-y)(x-z)+y^\mu(y-z)(y-x)+$$
$$+z^\mu(z-x)(z-y)\geqslant 0$$

(x, y, z положительны) имеют место при $-1<\mu<0$ (ранее оно было установлено для $\mu\geqslant 0$ и $\mu\leqslant -1$). *А. А. Конюшков*

833. Обобщение одного неравенства Бёрлинга. Ливингстон (A generalization of an inequality due to Beurling. Livingston Arthur E.), Pacif. J. Math., 1954, **4**, № 2, 251—257 (англ.)

Неравенство Бёрлинга

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_mb_n/\lg(m+n)\leqslant$$
$$\leqslant K\left(\sum_{m=1}^{\infty}ma_m^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nb_n^2\right)^{1/2},$$

где $a_m\geqslant 0$, $b_n\geqslant 0$ и $0<K<4e$, обобщается следующим образом:

При $1<p<\infty$ и $p^{-1}+q^{-1}=1$ выполняется неравенство

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)\,g(y)}{\alpha(x+y)}\,d\alpha(x)\,d\alpha(y)\leqslant$$
$$\leqslant K(\alpha)\left\{\int_0^\infty[f(x)]^p\,d\alpha(x)\right\}^{1/p}\times$$
$$\times\left\{\int_0^\infty[g(y)]^q\,d\alpha(y)\right\}^{1/q},\qquad(1)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на $[0,\infty)$, $\alpha(x)$ — неотрицательная неубывающая функция, непрерывная справа, и $0<K(\alpha)<p+q$.

Кроме того, $K(\alpha)\leqslant\pi/\sin(\pi/p)$, если $\alpha(x+y)\geqslant\alpha(x)+\alpha(y)$; $K(\alpha)\geqslant\pi/\sin(\pi/p)$, если $\alpha(x)$ непрерывна и $\alpha(x+y)\leqslant\alpha(x)+\alpha(y)$, $\alpha(0)=0$, $\alpha(x)\to\infty$ при $x\to\infty$. Неравенство (1) распространяется на случай n-кратных интегралов с $n>2$.
А. А. Конюшков

834. Числовые последовательности и интерполяционные формулы. Саннинский В. Я., Матем. в школе, 1953, № 6, 1—10

Приводится обычный вывод интерполяционной формулы Ньютона.

835 К. Задачник по алгебре и математическому анализу. Георгиу (Probleme de algebră şi analiza matematica. Gheorghiu Ch. Th. 660 p., Editura tehnica, 25, 06 Lei) (рум.)

Задачник для высших учебных заведений, в котором все задачи даны с подробными решениями. Каждому параграфу предшествуют теоретические объяснения. Первая часть, в основном, посвящена элементарной алгебре (исключая главу IV, в которой рассматривается теория определителей системы алгебраических уравнений). Во второй части собраны задачи по всем разделам дифференциального исчисления для функций одного и нескольких переменных (теория пределов, ряды, производные, применение производных, частные производные, зависимость функций, некоторые разделы дифференциальной геометрии и т. д.). В третьей части содержатся задачи по интегральному исчислению (неопределенный и определенный интегралы, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, геометрические, механические и физические применения интегрального исчисления).

В четвертой части содержатся задачи по обыкновенным дифференциальным уравнениям, по системам обыкновенных дифференциальных уравнений и по дифференциальным уравнениям в частных производных первого и второго порядков, а также задачи по вариационному исчислению. Последняя, пятая, часть посвящена теории функций комплексного переменного (аналитические и гармонические функции, конформные отображения, особые точки, разложение в ряды, вычеты, применение конформных отображений к решению задач математической физики). *М. К. Керимов*

836 РЕЦ. **Элементы дифференциального и интегрального исчислений. Смит, Гранвилл** (Elements of the differential and integral calculus, revised edition. Smith Percey F., Granville William Anthony, XV+463 pp., Ginn and Co., Boston, 1952, 4.00 doll.) [Рецензия: Рид (Read Cecil B.), School Sci. and Math., 1953, 53, № 9, 757 (англ.)]

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

837. **Эксперимент в обозначениях** (An experiment in notation. E. H. N.), Math. Gaz., 1954, 38, № 323, 35—36 (англ.)

Устанавливается способ, позволяющий для данной последовательности чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, при выполнении некоторых условий, найти последовательность коэффициентов $c_1, c_2, c_3, \ldots$ таких, что

$$\frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots} = 1 + \frac{c_1x}{1-a_1x} + \frac{c_2x^2}{(1-a_1x)(1-a_2x)} + \cdots$$

При этом автор пользуется своеобразным соглашением о расстановке скобок в формулах. *И. Г. Мельников*

838. **Степенные суммы и числа Бернулли. Цех** (Potenzsummen und Bernoullische Zahlen. Zech Th.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 3, 119—120 (нем.)

Дается вывод известного соотношения, выражающего степенные суммы

$$S_k(n) = 0^k + 1^k + \cdots + (n-1)^k,\ k \geqslant 0,$$

через полиномы и числа Бернулли. Именно, устанавливается соотношение $S_k(n) = [B_{k+1}(n) - B_{k+1}]/(k+1)$ и из рассмотрения приращения производной $S_k'(n)$ выводится рекуррентная формула

$$S_k(n) = k\int_0^n S_{k-1}(z)\,dz + B_k n,$$

позволяющая последовательно вычислять степенные суммы и числа Бернулли. *А. Г. Школьник*

839. **Замечание к разложению в ряд Фурье импульсной функции. Вейганд** (Eine Bemerkung zur Fourier-Entwicklung von Impulsfunktionen. Weigand A.), Maschinenbautechnik, 1954, 3, № 3, 139—142 (нем.)

Дается вывод известного разложения в ряд Фурье импульсной функции и популярно излагается суммирование этого ряда способом средних арифметических. *Э. Я. Риекстыньш*

840. **О разложении функции по ее моментам. Грин, Мессел** (On the expansion of functions in terms of their moments. Green H. S., Messel H.), Quart. Appl. Math., 1954, 11, № 4, 403—409 (англ.)

С помощью нестрогих рассмотрений авторы выводят хорошо известное формальное разложение функции в ряд вида

$f(x) = w(x)\sum_{n=0}^{\infty} f_n S_n(x)$, где $N_n f_n = \int_a^b S_n x f(x)\,dx$, а $S_n(x)$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ — система ортогональных многочленов относительно веса $w(x)$: $\int w(x) S_m(x) S_n(x)\,dx = N_n \delta_{mn}$. Попутно приводятся выражения через моменты для N_n и $S_n(x)$, которые также хорошо известны. *Н. И. Ахиезер*

841. **О рядах Неймана вещественных переменных. Кемпбелл** (Sur les séries de Neumann de variables réelles. Campbell Robert), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 9, 983—984 (франц.)

Пусть $f(x)$ — абсолютно суммируемая на $(-\infty,\infty)$ функция. Положим

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) J_1(|t|)\,dt;$$

$$a_n = n\int_{-\infty}^{\infty} f(t) J_n(t) |t|^{-1}\,dt,$$

где $n = 1, 2, \ldots, J_n(t)$ — функции Бесселя. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(x)$ называется рядом Неймана для $f(x)$.

Доказывается, что для того чтобы функция $f(x)$ была представима своим рядом Неймана, необходимо, чтобы она удовлетворяла интегральному уравнению

$$2f(x) = \int_0^{\infty}\left[f(t)\frac{J_2(t)J_0(x) - J_2(x)J_0(t)}{x-t}\,dt + f(-t)\frac{J_2(t)J_0(x) + J_2(x)J_0(t)}{x+t}\right]dt.$$

М. Д. Калашников

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

842. **Интеграл, содержащий E-функцию и ассоциированную функцию Лежандра первого рода. Мак-Роберт** (An integral involving an E-function and an associated Legendre function of the first kind. MacRobert T. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953, 1, 111—114 (англ.)

Вычисляется с помощью E-функций интеграл

$$\int_{-1}^{1}(1-\lambda^2)^{m/2} T_{m+n}^{-m}(\lambda)(1-\lambda)^{-l-m-1} \times E(l+m+1, \alpha_1, \ldots, \alpha_p : \rho_1, \ldots, \rho_q : (1-\lambda)z)\,d\lambda,$$

где T означает ассоциированную функцию Лежандра на разрезе, а E — принадлежащее автору обобщение гипергеометрической функции. *A. Erdélyi*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 218.

843. Об асимптотических свойствах полиномов, ортогональных на единичном круге, и о некоторых свойствах положительных гармонических функций. Геронимус (On asymptotic properties of polynomials which are orthogonal on the unit circle, and on certain properties of positive harmonic functions. Geronimus Ya. L.), Amer. Math. Soc. Translation, № 95, 1953, 29 (англ.)

Перевод из «Известий Академии наук СССР», сер. матем., 1950, **14**, 123—144.

844. О двойственных себе функциях. Бхатнагар (On self-reciprocal functions. Bhatnagar K. P.), Ganita, 1953, **4**, 19—37 (англ.)

Функция принадлежит R_μ, если она двойственна себе относительно преобразования с ядром Ганкеля $(xy)^{1/2}J_\mu(xy)$; функция принадлежит $R_{\mu\nu}$, если она двойственна себе относительно преобразования с ядром

$$(xy)^{1/2}\int_0^\infty J_\nu(xt)\,J_\mu(y/t)\,t^{-1}\,dt.$$

Функции f и φ связаны соотношением $\varphi(p)=\int_0^\infty g(pt)\,f(t)\,dt$. Автор, более или менее формально, доказывает большое количество результатов, из которых мы приводим некоторые (опуская условия их справедливости).

1) Любые два из свойств: I. $f(t)\in R_\mu$, II. $g(t)=t^{-1}g(t^{-1})$, III. $t^{-1}\varphi(t^{-1})\in R_\mu$ влекут третье.

2) Такой же результат с переменой мест f и φ.

3) Если $t^{-1}f(t^{-1})\in R_\mu$, $g(t)\in R_\nu$, то $\varphi(t)\in R_{\mu\nu}$.

4) Если $f(t)$ и $g(t)\in R_\mu$, то $\varphi(p)=p^{-1}\varphi(p^{-1})$.

Результаты иллюстрируются примерами. *A. Erdélyi*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 216.

845. Рекуррентные формулы для E-функций. Рагаб (Recurrence formulae for the E-functions. Ragab Fouad M.), Proc. Math. and Phys. Soc. Egypt, 1952, **4**, № 4, 127—136 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Автор дает два конечных разложения для $E(p;\ \alpha_r:q;\ \rho_s:x)$. Одно из них вида

$$\sum_{m=0}^{n} A_m x^{-m}\,E(p+1;\ \alpha_r+m,\ 1+\alpha+n+m:\rho_s+$$
$$+m,\ 1+\alpha+2m:x),$$

а другое вида

$$\sum_{m=0}^{n} B_m x^{-m}\,E(p+2;\ \alpha_r+m,\ 1+\alpha+n+m,\ 1+\alpha-$$
$$-\beta+m:q+2;\ \rho_s+m,\ 1+\alpha-\beta+n+m,$$
$$1+\alpha+2m:x),$$

коэффициенты A_m и B_m — некоторые комбинации из гамма-функций. Для каждого из этих разложений дано два доказательства: одно по индукции, а другое с использованием интегрального представления Барнса для E-функции. *A. Erdélyi*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 122.

846. Интеграл, содержащий модифицированные функции Бесселя второго рода и E-функцию. Рагаб (An integral involving a modified Bessel function of the second kind and an E-function. Ragab Fouad M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953, **1**, 119—120 (англ.)

Вычисляется интеграл

$$\int_0^\infty K_{mn}(2m\lambda)\,\lambda^{mk-1}\,E(p;\ \alpha_r:q;\ \beta_s:x\lambda^{-2m})\,d\lambda$$

для целого положительного m. Этот результат обобщает прежнюю формулу (для $m=2^r$) того же автора (Proc. Glasgow Math., Assoc, 1952, **1**, 72—75). *A. Erdélyi*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 218.

847. Интеграл от E-функции, выраженный как сумма двух E-функций. МакРоберт (Integral of an E-function expressed as a sum of two E-functions. MacRobert T. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953 **1**, 118 (англ.)

Вычисляется интеграл

$$\int_0^1 t^{-\rho}\,(1-t)^{\rho-\alpha-1}\,E(p;\ \alpha_r:q;\ \rho_s:xt)\,dt$$

в терминах E-функций.

Примечание референта: см. также Erdélyi et al., Higher transcendental functions, vol. I, McGraw-Hill, New York, 1953, p. 214, equation (5). *A. Erdélyi*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 218.

848. Об одном свойстве функций Бесселя. Пароди (Sur une propriété des fonctions de Bessel. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 2, 195—196 (франц.)

Исходя из решения рассмотренного ранее интегрального уравнения (Publ. sci. Ministère de l'Air, 1950, 242, 34), автор для произвольного натурального n элементарно выводит соотношения:

$$\frac{n}{2^n}\int_0^\pi\Big\{J_1(nz\sin\theta)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\times$$
$$\times(n-2k)\,J_1[z(n-2k)\sin\theta]+\cdots$$
$$\cdots+\frac{2(n-1)!}{\left(\frac{n}{2}+1\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!}J_1(2z\sin\theta)\Big\}\,d\theta=$$
$$=\frac{1-\cos^n z}{z},$$

если n — четное, и

$$\frac{n}{2^n}\int_0^{\pi}\left\{ J_1(nz\sin\theta)+\cdots \right.$$
$$\cdots+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\times$$
$$\times(n-2k)J_1[z(n-2k)\sin\theta)+\cdots$$
$$\left.\cdots+\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}J_1(z\sin\theta)\right\}d\theta=$$
$$=\frac{1-\cos^n z}{z},$$

если n — нечетное, где $J_1(z)$ — функция Бесселя первого рода. Для $n=1$ получаем классическое равенство

$$\int_0^{\pi}J_1(z\sin\theta)\,d\theta=2\,\frac{1-\cos z}{z},$$

М. Б. Гагуа

849. Замечание к характеристике «классических» ортогональных многочленов. А ц е л (Eine Bemerkung über die Charakterisierung der «klassischen» orthogonalen Polynome. A c z é l J.), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, 4, № 3—4, 315—321 (нем.)

Доказывается следующее предложение:

Пусть: 1) последовательность функций $u_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $Q_n(x)u_n'(x)=L_n(x)u_n(x)$, в котором $Q_n(x)$ и $L_n(x)$ — многочлены соответственно не выше второй и первой степеней;

2) у всех функций $u_n(x)$ имеются два общих вещественных (конечных или бесконечных) корня a и b, $a<b$;

3) существует такая функция $p(x)$, что $R_n(x)=u_n^{(n)}(x)/p(x)$ является многочленом точно n-й степени.

Тогда, в зависимости от того, будет ли степень $Q_n(x)$ равна 0, 1 или 2, многочлены $R_n(x)$ будут соответственно многочленами Эрмита, Лагерра или Якоби, ортогональными на интервале (a, b) а, $p(x)$ окажется соответствующим весом ортогонализации. *И. П. Натансон*

850. О некоторых интегралах от бесселевых функций по их индексу. К у к (Note on some integrals of Bessel functions with respect to their order. C o o k e J. C.), Monatsh. Math., 1954, 58, № 1, 1—4 (англ.)

Из известных интегральных представлений бесселевых функций (Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1949, ч. 1, 201, 336) автор, используя теорему об интеграле Фурье, получает выражение для нескольких определенных интегралов от бесселевых функций по их индексу. Получены следующие формулы (Φ — действительное):

1) для модифицированных бесселевых функций первого рода $I_\xi(z)$

$$\int_0^{\infty}I_\xi\cos\Phi\xi\,d\xi=\frac{1}{2}e^{z\cos\Phi}-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left\{\frac{\pi+\Phi}{(\pi+\Phi)^2+t^2}+\frac{\pi-\Phi}{(\pi-\Phi)^2+t^2}\right\}e^{-z\,\mathrm{ch}\,t}\,dt,$$

где $|\Phi|<\pi$, $|\arg z|\leqslant\pi/2$;

2) для модифицированных бесселевых функций второго рода $K_\xi(z)$

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}K_\xi(z)\,\mathrm{ch}\,(\xi-a)\Phi\,d\xi=i\pi e^{-z\mathrm{ch}\Phi}\,\mathrm{ch}a\Phi,$$
$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}K_\xi(z)\,\mathrm{sh}\,(\xi-a)\Phi d\xi=-\pi e^{-z\mathrm{ch}\Phi}\,\mathrm{sh}a\Phi,$$

$|\arg z|<\pi/2$ и a — действительное число;

3) для функции Ангера $\mathbf{J}_\xi(z)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{J}_\xi(z)\cos\Phi\xi\,d\xi=\begin{cases}\cos(z\sin\Phi) & |\Phi|<\pi,\\ 1/z & |\Phi|=\pi,\\ 0 & |\Phi|>\pi,\end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{J}_\xi(z)\sin\Phi\xi\,d\xi=\begin{cases}\sin(z\sin\Phi) & |\Phi|<\pi,\\ 0 & |\Phi|\geqslant\pi.\end{cases}$$

Аналогичный метод применял Рамануджан при вычислении интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}J_{\mu+\xi}(z)J_{\nu-\xi}(z)\cos\Phi\xi d\xi$ (Ватсон Г. Н., цит. соч., 495). *Б. Р. Левин*

851. Об изменении функции третьей степени. Б о л о н ь я (Sulla variazione di una funzione di 3° grado. B o l o g n a C a r l o), Archimede, 1954, 6, № 2, 77 (итал.)

Автор изучает элементарными средствами поведение многочлена третьей степени. *В. Л. Гончаров*

852. Функции Бесселя комплексного аргумента $x\sqrt{j}$ и функции Кельвина нулевого и первого порядков. Д у н с к и й (Les fonctions de Bessel d'argument complexe $x\sqrt{j}$ et les fonctions de Kelvin d'ordre zéro et 1. D u n s k i Ch. V i t a l), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1954, 23, № 1, 52—59 (франц.)

Работа не содержит принципиально новых результатов. Асимптотические выражения для томсоновских функций ber (x), bei (x), ker (x), kei (x) были даны Уайтхедом (Whitehead, Quart. J. Math., 1911, 42, 316—342). Ряд формул, приведенных в работе автора, нельзя признать корректными. *Н. С. Кошляков*

853. Об одной статье Гросвальда. Г у л д (A note on a paper of Grosswald. G o u l d H. W.), Amer. Math. Montly, 1954, 61, № 4, 251—253 (англ.)

Автор доказывает соотношение Гросвальда для биномиальных коэффициентов (РЖМат, 1953, 313, 314), сравнивая выражения для r-й производной

полиномов Лежандра $P_n(x)$, полученные из формулы Родрига и из формулы

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-k}.$$

Л. М. Глускин

854. Об обобщенной гипергеометрической функции типа Аппеля. Саран (On the generalised hypergeometric function of Appell's type. Saran Shanti), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, 45, № 4, 125—132 (англ.)

Рассматриваются гипергеометрические функции типа Аппеля от трех независимых переменных (Appell P., Sur les fonctions hypergéometriques de plusieurs variables, Mem. sci. math. Fas. III, 1925). Даны выражения этих функций через гипергеометрические функции от двух независимых переменных и через обычные гипергеометрические функции одной независимой переменной. Выписаны дифференциальные уравнения в частных производных, которым удовлетворяют рассматриваемые функции. *М. В. Гагуа*

855. Об одном обобщении полиномов Лягерра и связанной с ним задаче Коши для уравнения в частных конечных разностях. Денисюк И. Н., Укр. матем. ж., 1954, 6, № 2, 245—256

Некоторые прикладные задачи приводят к необходимости построения оригинала в операционном соответствии

$$p\,\frac{(p-1)^n(1-p/\lambda)^n}{(p+1)^{n+1}(1+p/\lambda)^{n+1}} \doteqdot e^{-t}L_n(2t,\lambda) + e^{-\lambda t}\Lambda_n(2t,\lambda)$$

По аналогии с известным соответствием $p(p-1)^n(p+1)^{-n-1} \doteqdot e^{-t}L_n(2t)$, где $L_n(2t)$—нормированные полиномы Лагерра, автор называет $L_n(2t,\lambda)$ и $\Lambda_n(2t,\lambda)$ обобщенными полиномами Лагерра.

Вопрос о нахождении коэффициентов этих полиномов, зависящих от двух значков — номера полинома n и индекса коэффициента в данном полиноме $k\,(k=0,1,\ldots,n)$ — сведен к решению уравнения в частных конечных разностях, при граничных условиях, заданных на прямой $k=n$. *В. К. Иванов*

856. Одно свойство бесселевых функций. Аи-Саймон (A property of Bessel functions. Ap Simon H. G.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 16, 282—283 (англ.)

Рассматривается детерминант второго порядка, элементами которого служат модифицированные функции Бесселя первого и второго рода (Ватсон, Теория бесселевых функций, § 3.7):

$$D_{n,n}(x,y) = (-1)^n \begin{vmatrix} I_n(x) & I_n(y) \\ K_n(x) & K_n(y) \end{vmatrix}.$$

Исходя из того, что функция $F(t) \equiv D_{n,n}(2t\,\mathrm{ch}\,k, 2t\,\mathrm{sh}\,k)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$t^3F^{IV} + 4t^2F''' - (4n^2-1)(tF''-F') - 8\,\mathrm{ch}\,2k\,(t^3F'' + 2t^2F') + 16t^3F = 0,$$

автор получает следующее разложение этой функции в степенной ряд:

$$D_{n,n}(2t\,\mathrm{ch}\,k, 2t\,\mathrm{sh}\,k) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{Q_r^n(\mathrm{ch}\,2k)\,t^{2r}}{r!\,(r+n)!},$$

где Q_r^n — присоединенные функции Лежандра.

Б. Р. Левин

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

857. Операционное исчисление с двумя переменными. Чакрабарти (Operational calculus with two variables. Chakrabarty N. K.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1953, 67, сер. 1, № 3, 203—217 (англ.)

Доказывается теорема: Если

$$f(p,q) \doteqdot h(x,y) \quad \text{и} \quad \Phi(p,q)\,h(p^m,q^n) \doteqdot \Psi(x,y),$$

то

$$\frac{f(p,q)}{pq} = \int_0^\infty\int_0^\infty \Psi(x,y)\,dxdy \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{s^{1/m}t^{1/n}}{\Phi(s^{1/m},t^{1/n})} e^{-ps-xs^{1/m}} \cdot e^{-qt-yt^{1/n}}\,dsdt$$

при некоторых условиях на функции Φ и Ψ, относящихся к их поведению при малых и больших значениях аргументов и обеспечивающих достаточно сильную сходимость интегралов.

Из этой теоремы выводится ряд следствий, например

$$pq/\sqrt{1+p^2q^2} \doteqdot J_0(\sqrt{2xy})\,J_0(\sqrt{2xy}).$$

В. И. Левин

858. О некоторых теоремах операционного исчисления с двумя переменными. Чакрабарти (On certain theorems in operational calculus with two variables. Chakrabarty N. K.), Ganita, 1953, 4, 1—11 (англ.)

859. Обратные преобразования произведений преобразований Лежандра. Черчилл, Долф (Inverse transforms of products of Legendre transforms. Churchill R. V., Dolph C. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 93—100 (англ.)

Линейное преобразование интегрируемой по Риману на $[-1, 1]$ функции $F(x)$ в числовую последовательность $f(n)$:

$$T\{F(x)\} = \int_{-1}^{1} F(x)\,P_n(x)\,dx = f(n), \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, допускает формальное обращение в виде

$$T^{-1}\{f(n)\} = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)f(n)\,P_n(x), \quad -1<x<1.$$

Авторы устанавливают для этого преобразования аналог теоремы Бореля о свертке, именно: если $T\{F(x)\} = f(n)$ и $T\{G(x)\} = g(n)$, то для любого x из $(-1,1)$

$$T^{-1}\{f(n)\,g(n)\}_x = H(x) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{E(x)} F(y)\,G(z)\,(1-x^2-y^2-z^2+2xyz)^{-1/2}\,dy\,dz,$$

где $E(x)$ — внутренность эллипса $y^2+z^2-2xyz = 1-x^2$. Для $H(x)$ дается еще ряд представлений в частности

$$H(\cos\mu) = F(\cos\mu) * G(\cos\mu) = \frac{1}{\pi}\int\limits_S\int F(\cos\lambda)\,G(\cos\nu)\,dS,$$

где S — полусфера $X^2+Y^2+Z^2=1$, $Z\geqslant 0$, $dS = \sin\lambda\,d\lambda\,d\alpha$, а углы λ, μ, ν и α связаны соотношением $\cos\nu = \cos\lambda\cos\mu + \sin\lambda\sin\mu\cos\alpha$.

В. И. Левин

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

860. Некоторые замечания о центрах масс. Дил, Хафф (Some remarks on centroids. Deal R. B., Huff W. N.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 624—625 (англ.)

Пусть фигура A с центром масс $(\overline{x}, \overline{y})$ лежит в первом квадранте и пусть $(\overline{x_1}, 0), (0, \overline{y_2})$ суть соответственно центры масс тел, полученных вращением A вокруг осей x и y. Доказывается формула $\overline{x}\,\overline{y_2} = \overline{x_1}\,\overline{y}$. Если A имеет ось симметрии, параллельную оси y, то $\overline{y_2} = \overline{y}$; это имеет место, в частности, для циклоиды.

Ф. В. Широков

861. Вычисление ньютонова притяжения двух однородных коаксиальных дисков. Гросс (Calcolo dell'attrazione newtoniana tra due dischi omogenei coassiali. Gross Wolf), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 507—515 (итал.)

Пусть ρ_i, r_i и h_i $(i=1,2)$ — соответственно плотности, радиусы и высоты цилиндрических дисков. Требуется вычислить

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \pi\varkappa\rho_1\rho_2[F(d+h_1+h_2) - F(d+h_2) - F(d+h_1) + F(d)],$$

где

$$F(z) = 4\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{r_1} x\,dx\int\limits_0^{r_2} y\,dy\int\limits_0^{z} f^{-1/2}\,dz,$$

$$f = x^2+y^2-2xy\cos\varphi+z^2$$

(d — расстояние между ближайшими друг к другу основаниями цилиндров). Устанавливается, что

$$F(z) = r_1 r_2\int\limits_0^{\pi} F^*(z,\varphi)\,d\varphi,$$

причем

$$z^2\frac{d^2F^*}{dz^2} - 5z\frac{dF^*}{dz} + 8F^* = 4\int\limits_0^z \frac{B}{\sqrt{z^2+A}}\,dz,$$

где $A = r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\varphi$, $B = 2r_1r_2 - (r_1^2+r_2^2)\cos\varphi$.

Отсюда интегрированием с учетом условий на бесконечности автор получает, что

$$F(z) = 2r_1^2r_2^2\int\limits_k^{\sqrt{n}} \frac{K(x)}{x\sqrt{1-x^2/n^2}}\,dx + \frac{\pi}{8}(r_1^2+r_2^2)\times$$

$$\times (r_1^2-r_2^2-4z^2) - \frac{1}{4}(r_1^2-r_2^2)(r_1^2+r_2^2-4z^2)\{[E(k) -$$

$$-K(k)]F(\overline{k},\theta) + K(k)E(\overline{k},\theta)\} + \frac{z}{3}\sqrt{z^2+(r_1+r_2)^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{4}[13(r_1^2+r_2^2) - 2z^2][E(k)-K(k)] + 5r_1r_2K(k)\right\},$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы

$$k = 2\sqrt{r_1r_2}/\sqrt{z^2+(r_1+r_2)^2},$$

$F(\overline{k},\theta)$ и $E(\overline{k},\theta)$ — соответствующие неполные эллиптические интегралы, $k^2+\overline{k}^2=1$, $\sin\theta = (r_1-r_2)/\overline{k}(r_1+r_2)$, и $n = 4r_1r_2(r_1+r_2)^{-2}$. В случае $r_1=r_2$ возможно разложение функции $F(z)$ в ряд по степеням $\zeta = z/r_1$ с помощью преобразования Лапласа.

В. И. Левин

862. Прохождение длинных волн через препятствия при частичном отражении с заданным коэффициентом отражения. Дмитриев А. А., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 4, 509—512

Сложение синусоид с разными начальными фазами и амплитудами приводит к некоторым выводам относительно гармонических волн в каналах. Высказывается предположение, что если в замкнутом канале с частично отражающей перегородкой в начальный момент времени возбуждена бегущая волна, то возникающее волнение должно с течением времени стремиться к стоячим волнам. Последовательное образование отраженных волн в замкнутом канале с частично отражающей перегородкой показано также методом операционного исчисления.

Примечание референта. Формулы (8) должны читаться так: при $t=0$ $u = -A\sin(\omega x/c)$; $\partial u/\partial t = A\omega\cos(\omega x/c)$. При интегрировании операторного уравнения не указаны граничные условия. В ряд разлагается не знаменатель операторного решения (как это указывается в статье), а величина, ему обратная.

В. И. Левин

См. также; 596, 675, 682, 758, 761, 764К, 795 799, 805, 810, 881, 969, 979К

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

863. О теореме Хана — Банаха. Монна (Sur le théorème de Hahn- Banach. Monna A. F.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 1, 9—16 (франц.)

Изучается геометрическая форма известной теоремы Хана—Банаха о распространении аддитивного функционала.

Пусть E — линейное топологическое пространство. Множество $V \subset E$ называется плоскостью, если оно может быть получено трансляцией линейного подмножества V^* пространства E. Множество W называется гиперплоскостью, если существует аддитивный и однородный функционал f в E и постоянная c такие, что $x \in W$ равносильно $f(x) = c$.

Теорема. Пусть K — выпуклое открытое множество топологического пространства E и V — плоскость, не пересекающаяся с K. Существует замкнутая гиперплоскость $W \supset V$, также не имеющая с K общих точек.

Доказательство опирается на упоминавшуюся выше теорему Хана—Банаха. *Г. П. Акилов*

864. Теория пространств L^p для конечно-аддитивных функций множества. Лидер (The theory of L^p-spaces for finitely additive set functions. Leader Solomon), Ann. Math., 1953, 58, № 3, 528—543 (англ.)

$\mathfrak{A}$ — произвольная булева алгебра, I — ее единица; J — положительная, конечно-аддитивная функция, определенная в $\mathfrak{A}$, удовлетворяющая условию $J(I) = 1$.

Рассматриваются пространства: V^1, V^p $(1 \leqslant p < \infty)$ и V^∞. V^1 — пространство конечных, конечно-аддитивных функций на $\mathfrak{A}$, абсолютно непрерывных относительно J. Если $F \in V^1$, то величина $\sup\limits_{E} \{F(E) - F(E')\}$, где E' — дополнение E, конечна; она принимается за норму $\| F \|_1$ элемента F.

V^p $(1 \leqslant p < \infty)$ определяется как пространство, элементами которого являются такие $F \in V^1$, что $\Sigma_\Delta | F(E_\nu) / J(E_\nu)|^p J(E_\nu) \leqslant M$; здесь и в дальнейшем $\Delta = \{E_\nu\}$ — произвольное разбиение I на конечное число попарно дизъюнктных элементов;

$$\| F \|_p = \sup_{\Delta} \left[\Sigma_\Delta | F(E_\nu) / J(E_\nu)|^p J(E_\nu) \right]^{1/p}.$$

V^∞ — пространство всех $F \in V^1$, для которых $\| F \|_\infty = \sup\limits_{E} [| F(E) | / J(E)] < \infty$.

Пространства V^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ полны и относительно естественного упорядочения представляют собой банаховы структуры.

Устанавливается неравенство

$$\| F \|_p^p \leqslant \| F \|_{p_1}^{p_1 t_1} \| F \|_{p_2}^{p_2 t_2}$$
$$(p = t_1 p_1 + t_2 p_2,\ t_1, t_2 \geqslant 0,\ t_1 + t_2 = 1).$$

На основании этого неравенства доказывается следующая теорема о сходимости в V^p: если последовательность $\{F_n\}$ сходится к F в V^1, причем F и $F_n \in V^r$ $(r > 1)$, и $\| F_n \|_r \leqslant M$ для всех n, то эта последовательность сходится к F в V^p, где $1 \leqslant p < r$.

Любая функция вида $G(A) = \Sigma_\Delta a_\nu J(A \cap E_\nu)$ называется ступенчатой; доказывается, что ступенчатые функции плотны в V^p $(1 \leqslant p < \infty)$.

Далее устанавливается общая форма линейного функционала в V^p: любой линейный функционал в V^p $(1 \leqslant p < \infty)$ имеет вид

$$(F, H) = \lim_{\Delta} \Sigma_\Delta F(E_\nu) \cdot H(E_\nu) / J(E_\nu),$$

где $F \in V^q$ $(p + q = pq)$. Выясняется также смысл слабой и сильной сходимости в V^p.

Система функций $\{H_\alpha\}$, принадлежащих V^q $(2 \leqslant q \leqslant \infty)$, называется ортонормальной, если $(H_\alpha, H_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Если $F \in V^p$ $(p + q = pq)$, то числа $c_\alpha = (F, H_\alpha)$ называются коэффициентами F по отношению к $\{H_\alpha\}$.

Автор доказывает ряд теорем типа неравенства Бесселя и теоремы Рисса—Фишера; эти результаты аналогичны полученным в работе Марцинкевича и Зигмунда об ортогональных системах в L^p (Marcinkiewicz J., Zygmund A., Fundam. math., 1937, 28, 309—335).

Следует отметить, что основные понятия и многие результаты заимствованы из статьи Бохнера (Bochner S., Ann. Math., 1939, 40, 769—799).

М. З. Соломяк

865. Заметка о субаддитивных функционалах. Бонсалл (A note on subadditive functionals. Bonsall F. F.), J. London Math. Soc., 1954, 29, ч. 1, № 113, 125—126 (англ.)

Функционал p в линейном пространстве X называется выпуклым (по терминологии автора, субаддитивным), если $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$; $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ $(x, y \in X;\ \alpha \geqslant 0$ — вещественное). Как известно, каков бы ни был выпуклый функционал p, в X существует аддитивный и однородный функционал f, удовлетворяющий условию $f(x) \leqslant p(x)$ $(x \in X)$. Для того чтобы существовал функционал f, удовлетворяющий более сильному требованию $f(x) < p(x)$ $(x \in X;\ x \neq 0)$, очевидно, необходимо, чтобы

$$p(x) + p(-x) > 0 \quad (x \in X;\ x \neq 0). \qquad (1)$$

Это условие оказывается и достаточным при дополнительном предположении, что X становится сепарабельным нормированным пространством, если ввести в нем норму, полагая $\| x \| = p(x) + p(-x)$ $(x \in X)$ (Aronszajn N., Atti Acad. naz. Lincei Rend., 1937 (6), 26, 374—376).

В настоящей работе показывается, что без этого требования достаточность условия (1) не имеет места. *Г. П. Акилов*

866. О теореме отделимости выпуклых множеств при помощи гиперплоскости. Маринеску (Asupra teoremei de separare a mulţimilor convexe printr'un hiperplan. Marinescu G.), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, **3**, № 9—10, 301—303 (рум.; резюме русс., франц.)

При помощи теоремы Цорна доказывается следующая лемма референта: если G_1 и G_2 суть два выпуклых непересекающихся множества в вещественном топологическом линейном пространстве E, то E может быть разложено на два непересекающихся выпуклых множества E_1 и E_2 таких, что $G_1 \subseteq E_1$ и $G_2 \subseteq E_2$. *З. Л. Лейбензон*

867. О продолжении непрерывных линейных функционалов в топологических векторных пространствах. Маринеску (Asupra prelungirii funcţionalelor liniare continue în spaţiile vectoriale topologice. Marinescu G.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Române, Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 2, 317—326 (рум.; резюме русс., франц.)

Доказывается известная теорема Банаха (Банах С. С., Курс функціонального аналізу, «Радянська школа», Київ, 1948, 24) о продолжении в векторных пространствах линейных функционалов, удовлетворяющих неравенству $f(x) \leqslant p(x)$, где $p(x)$ — заданный полуаддитивный функционал, с помощью теоремы об отделении гиперплоскостью выпуклых множеств в линейных топологических пространствах, доказанной референтом.

В теоремах 5 и 6 ошибочно утверждается непрерывность продолжения (функционала F). Например, нет непрерывных линейных функционалов (отличных от нуля) в пространстве измеримых функций на [0,1]. *З. Л. Лейбензон*

868. Выпуклые множества в линейных пространствах. III. Кли (Convex sets in linear spaces. III. Klee V. L., Jr.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 1, 105—111 (англ.)

Работа является продолжением двух предыдущих публикаций (Duke Math. J., 1951, **18**, 443—466, 875—883). Пусть L — вещественное линейное множество, T — семейство множеств $X \subset L$ таких, что для каждого конечно-мерного линейного многообразия $V \subset L$ множество $X \cap V$ открыто в естественной «евклидовой» топологии на V. Семейство T задает в L некоторую топологию. Пространство (L, T) локально выпукло тогда и только тогда, когда $\dim L \leqslant \aleph_0$ ($\dim L$ — мощность базы Хамеля множества L). Если $\dim L > \aleph_0$, то существует отличное от всего пространства замкнутое выпуклое множество, пересекающееся с каждым открытым выпуклым множеством.

В § 2 исследуются положительно однородные, субаддитивные функционалы, определенные на L со значениями из $(-\infty, \infty]$ (если $x, y \in L$, $\lambda > 0$, то

$$p(\lambda x) = \lambda\, p(x),\ p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)).$$

Относительно этих функционалов, называемых p^+-функционалами, доказываются две теоремы.

$\dim L < \aleph_0$ тогда и только тогда, когда каждый p^+-функционал на L мажорирует некоторый линейный функционал.

$\dim L \leqslant \aleph_0$ тогда и только тогда, когда каждый полунепрерывный снизу p^+-функционал мажорирует некоторый линейный функционал.

В § 3 рассматривается пространство (L, T'), где T' — семейство множеств $Y \subset L$ таких, что Y открыто в некоторой топологии, относительно которой L — хаусдорфово линейное пространство. Линейное пространство (L, T') само является хаусдорфовым; поэтому T' есть сильнейшая хаусдорфова линейная топология на L. $T' \subset T$, причем $T' = T$ тогда и только тогда, когда $\dim L \leqslant \aleph_0$. Поэтому при $\dim L \leqslant \aleph_0$ пространство (L, T') локально выпуклое. Доказывается, что если $\dim L \geqslant 2^{\aleph_0}$, то (L, T') не является локально выпуклым.

Отмечается, что представляет интерес получить описание T' без использования всех хаусдорфовых линейных топологий на L.

В § 4 вводится минимальное семейство Γ множеств n-мерного евклидова пространства E_n, обладающее свойствами: 1) Γ содержит выпуклые замкнутые множества; 2) если $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$ принадлежат Γ, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in \Gamma$; 3) если $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ принадлежат Γ, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \in \Gamma$. Ставится вопрос, содержит ли Γ все выпуклые борелевские множества. При $n = 2$ автор получает положительный ответ. Для $n > 2$ вопрос остается открытым. *Г. Ш. Рубинштейн*

869. Об определяемых нормами топологиях в линейных пространствах. Лаугвиц (Über Normtopologien in linearen Räumen. Laugwitz Detlef), Arch. Math., 1953, **4**, № 5/6, 455—460 (нем.)

Исследуется мощность $\mathfrak{n}(L)$, (соответственно $\mathfrak{n}_e(L)$), совокупности топологически различных произвольных (соответственно евклидовых) нормирований данного векторного пространства L. Если аффинная размерность a пространства L (т. е. наибольшая мощность множеств линейно независимых элементов из L) не меньше континуальной, то $\mathfrak{n}_e(L) = \mathfrak{n}(L) = 2^a$. Устанавливается инвариантность метрической размерности нормированного пространства N (т. е. наименьшей мощности множеств, линейная оболочка которых плотна в N) и порождаемых им тензорных пространств при переходе к топологически равносильным нормированиям. *Д. А. Райков*

870. О метризуемых пространствах Монтеля. Дьёдонне (Sur les espaces de Montel métrisables. Dieudonné Jean), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 2, 194—195 (франц.)

Линейное топологическое пространство называется пространством Монтеля, если оно локально-выпукло, хаусдорфово и всякое его ограниченное подмножество (относительно) компактно. Отвечая на вопрос А. Гротендика, автор показывает, что всякое метризуемое пространство Монтеля обладает счетным всюду плотным множеством. *Г. Е. Шилов*

871. Выпуклые множества в линейных топологических пространствах. Гальперин (Convex sets in linear topological spaces. Halperin Israel), Trans. Roy. Soc. Canada, 1953, Sec. III, **47**, June, 1—6 (англ.)

Теоремы об отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями в топологических линейных пространствах. Как указывает сам автор в конце статьи, работа не содержит новых результатов. Некоторые доказательства представляют методический интерес. *Д. А. Райков*

872. Приведение произведений операторов к каноническому виду в теории вторичного квантования. Бонч-Бруевич В. Л., Медведев Б. В., Ж. эксперим. и теор. физики, 1953, 25, № 4, 410—416

Дается метод преобразования произведения произвольных операторов в представлении вторичного квантования к виду, когда все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения. *В. Т.*

873. Теоретико-групповые исследования по теории спинорных волновых уравнений. Бауэр (Gruppentheoretische Untersuchungen zur Theorie der Spinwellengleichungen. Bauer Friedrich L.), Sitzungsber. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1953, 1952, 111—179 (нем.)

Проводится систематическое рассмотрение волновых уравнений типа Дирака при помощи теории конечномерных представлений полупростых групп. Ли. Большая часть материала носит обзорный характер, в частности, статья содержит полный обзор соответствующих частей теории лиевых алгебр.

I. E. Segal

Перевод из Math. Rev, 1954, 15, № 3, 229.

874. О теореме Сакса для абстрактных полиномов. Альбрыхт (On a theorem of Saks for abstract polynomials. Albrycht J.), Studia math (Warszawa), 1953, 14, № 1, 79—81 (англ.)

Теорема, рассмотренная Алексевичем (Alexiewicz A., Studia math., 1953, 13, 18—29, теорема 1; РЖМат, 1953, 1249), о структуре линейного оператора, зависящего от параметра t, обобщается на операторы $U(x, t)$ на $X \times T$, полиномиальные m-й степени при всяком фиксированном t, измеримые по Бохнеру при всяком фиксированном x.

П. И. Романовский

875. Граничные распределения аналитических функций. Кёте (Die Randverteilungen der analytischen Funktionen. Köthe Gottfried), Ber. Math.-Tagung, Berlin, 1953, 220 (нем.)

Краткое резюме сообщения о ранее опубликованных результатах (Köthe G., Math. Z., 1952, 57, 13—33).

См. также: 664, 692, 713, 731, 744, 753, 801, 825.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

876. Об одной предельной теореме теории вероятностей. Газапина (Un teorema limite del calcolo delle probabilità. Gasapina Umberto), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 599—609 (итал.)

Пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

— удовлетворяющая центральной предельной теореме последовательность независимых случайных величин с $MX_n = 0$ и $DX_n = 1$. Пусть далее при некотором целом положительном ρ моменты $MX_n^{2(2\rho-1)}$ существуют и ограничены сверху некоторой постоянной. Положим

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

и

$$T_n = \frac{S_1^{2\rho} + S_2^{2\rho} + \ldots + S_n^{2\rho}}{n^{\rho+1}}.$$

Доказывается, что во всех случаях, когда предельное распределение для T_n при $n \to \infty$ существует, оно не зависит от распределений величин X_n. (В действительности в перечисленных предположениях это распределение всегда существует. *Прим. реф.*) Это утверждение очевидным образом вытекает из результатов Донскера (Donsker M. D., Mem. Amer. Math. Soc., 1951, № 6, 1—12) и референта (Успехи матем. наук, 1953, 8, № 3, 165—167, а также РЖМат, 1953, 532). *Ю. В. Прохоров*

877. Об одной теореме относительно устойчивых распределений. Скороход А. В., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2, 189—190

Доказывается теорема: Плотность устойчивого закона распределения с характеристическим показателем $\alpha < 1$ имеет вид

$$p(x) = x^{-1}\Phi_1(x^{-\alpha}) \quad \text{при } x > 0,$$
$$p(x) = x^{-1}\Phi_2(|x|^{-\alpha}) \quad \text{при } x < 0,$$

где $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ — целые аналитические функции.

Для случая симметричных распределений с $\alpha < 1$ аналогичный результат установлен ранее Винтнером (Wintner A., The Fourier transforms of probability distribution, Baltimore, 1947, 119—125). *Ю. В. Прохоров*

878. Предельное распределение случайной величины, являющейся разностью двух независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона. Фиш (Rozkład graniczny zmiennej losowej, będącej różnicą dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona. Fisz M.), Zastosow. mat., 1953, 1, № 1, 41—45 (польск.; резюме русс., англ.)

Рассматривается случайная величина $x = x_1 - x_2$, где x_1 и x_2 — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона:

$$P\{x_i = k\} = \frac{\lambda_i^k}{k!} e^{-\lambda_i} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots; i = 1, 2; \lambda_i \geqslant 0),$$

и доказывается, что x имеет асимптотически нормальное распределение (при $\lambda_i \to \infty$). В качестве примера автор приводит (для нескольких значений λ_i) две таблицы значений вероятностей и функции распределения случайной величины x и их приближенных значений, полученных на основе нормального распределения. *W. Sadowski*

879. Образование цепи Маркова. Франкс (La génération d'une chaîne de Markoff. Franckx E.), Mitt. Verein. Schweiz. Versich.-Math., 1953, 53, 145—151 (франц.)

Отмечается, что переходные матрицы, будучи степенями конечной квадратной матрицы, обладают с векторной точки зрения некоторыми элементарными свойствами. *K. L. Chung*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 3, 238.

880. Об одном классе стохастических интегро-дифференциальных уравнений, Рамакришнан, Матьюс (On a class of stochastic integro-differential equations. Ramakrishnan Alladi, Mathews P. M.), Proc. Indian Acad. Sci., 1953, A38, № 6, 450—466 (англ.)

Рассматривается случайный однородный во времени марковский процесс $E(t)$ $(t \geqslant 0)$, определяемый следующими условиями: 1) $E(0) > \nu$, где ν — фиксированное неотрицательное число; 2) из любой точки $E(t) > \nu$ за время dt с вероятностью $R(q)\,dq dt$ может произойти скачок в точку E', лежащую между qE и $(q+dq)E$; при этом $R(q)=0$ вне интервала $0 < q < 1$; 3) в промежутках между скачками $dE/dt = \beta(E)$, где $\beta(E)$ $(E \geqslant \nu)$ — данная функция; 4) если $E(t_0) \leqslant \nu$, то $E(t) = E(t_0)$ при всех $t > t_0$. Приводится, со ссылкой на статью Рамакришнана (Astrophys. J., 1952, 115, 141), интегро-дифференциальное уравнение подобного процесса, справедливое лишь при постоянном β из-за допущенной авторами ошибки в его записи. Новые результаты получаются для двух частных случаев:

а) $\nu = 0$, $\beta(E) = \text{const} \neq 0$, $R(q) = \alpha\delta(q - q')$, $0 < q' < 1$, где $\delta(x)$ — функция Дирака. Находится явное выражение переходных вероятностей.

б) $\nu > 0$, $\beta(E) = 0$, $R(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r}, & 1 > q > r \\ 0, & r \geqslant q > 0. \end{cases}$

Находится предельное распределение $E(t)$ при $t \to \infty$, сосредоточенное, очевидно, на отрезке $[0, \nu]$.

Обе формулы очень громоздки. Приводится также полученное ранее Чандрасекхаром и Мюнхом предельное стационарное распределение $E(t)$ для случая а). Условия, при которых законны используемые в статье преобразования, не сформулированы.

Замеченные ошибки и опечатки: 1. В интегро-дифференциальном уравнении (2) вместо $\dfrac{\partial}{\partial E}\{\beta\pi(E|E_0,\ t)\}$ должно быть $\beta(E)\dfrac{\partial}{\partial E}\pi(E|E_0, t)$; тогда это уравнение будет справедливо при произвольной функции $\beta(E)$. Соответственно этому в (4) должно быть $s+k-1$, а не $(s-1)$. 2. В (10) и (13) вместо $x_1 q^{n-1}$ должно быть $x_1 q^n$. 3. В (34) вместо $R(E|E') = 0$ должно быть $R(E|E') \neq 0$. 4. В (33) вместо $(E_0/E)^{s-1}$ должно быть $(E_0/E)^s$. 5. На стр. 452, 9 строка снизу, должно быть $\alpha\delta(q' - q)$. *А. А. Юшкевич*

881. Решение проблемы анизотропного случайного блуждания в k-мерном пространстве. Грожан (Solution of the non-isotropic random flight problem in the k-dimensional space. Grosjean Carl C.), Physica, 1953, 19, № 1—2, 29—45 (англ.)

Рассматривается последовательность случайных векторов a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ в k-мерном пространстве $(k \geqslant 2)$, в которой начало каждого следующего вектора совпадает с концом предыдущего. Считаются заданными зависящие от n плотности распределений длин векторов a_n и углов между векторами a_n и a_{n+1}. При $k > 2$ предполагается, что распределение направления вектора a_{n+1} инвариантно относительно вращения вокруг вектора a_n. Изучается распределение суммы $a_1 + \ldots + a_n$. Отдельно рассматриваются случаи $k=2$ и $k > 2$.

При $k = 2$ вводятся следующие обозначения: $\varphi_n(r, \theta)/2\pi$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi,\ r \geqslant 0)$ — плотность совместного распределения длины r суммы векторов $a_1 + \ldots + a_n$ и угла θ между векторами $a_1 + \ldots + a_n$ и a_n;

$\psi_n(r, \theta)/2\pi$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi,\ r \geqslant 0)$ — плотность совместного распределения длины r суммы векторов $a_1 + \ldots + a_n$ и угла θ между векторами $a_1 + \ldots + a_n$ и a_{n+1}.

Составляя рекуррентные соотношения для функций φ_n и ψ_n и пользуясь теоремой сложения бесселевых функций, автор находит явные выражения для φ_n и ψ_n.

При $k > 2$ выводятся сходные еще более громоздкие формулы для величин, аналогичных $\varphi_n(r, \theta)$ и $\psi_n(r, \theta)$. В них вместо функций Бесселя используются полиномы, изученные Гегенбауэром (Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. II, ГТТИ, 1934, стр. 127 и 136).

Автор не формулирует условий, при которых применяемые им преобразования законны. *А. А. Юшкевич*

882. Вероятностное описание непрерывных полей. Обухов А. М., Укр. матем. ж., 1954, 6, № 1, 37—42

Обзорный доклад по теории случайных полей (т. е. случайных функций нескольких пространственных координат), прочитанный на 3-м Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике (Киев, сентябрь — октябрь 1953 г.). Основное внимание уделено рассмотрению вторых моментов однородного и изотропного случайного поля; указаны спектральное разложение для этих моментов, общий вид корреляционного тензора для векторных однородных и изотропных случайных полей и формулы, дающие разложение общего такого тензора на «потенциальную» и «соленоидальную» компоненты. Отмечается связь имеющихся результатов в теории случайных полей с исследованиями по статистической теории турбулентности; приводится основная литература в этой области. *А. М. Яглом*

883. О гипотезе Тейлора и членах уравнений Навье — Стокса, сдержащих ускорения. Лин (On Taylor's hypothesis and the acceleration terms in the Navier-Stokes equations. Lin C. C.), Quart. Appl. Math., 1953, 10, № 4, 295—306 (англ.)

В связи с исследованиями по теории изотропной турбулентности автор изучает общий вид изотроп-

ных тензоров второго ранга в трехмерном пространстве и доказывает теорему о разложении такого тензора на «потенциальную» и «соленоидальную» компоненты, повторяющую результат, найденный ранее А. М. Обуховым (ср. Яглом А. М., Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1948, **12**, № 6, 501—522, а также реф. 882). Основная часть статьи посвящена специальным гидродинамическим вопросам (см. подробный реферат в РЖМех, 1953, 213).

А. М. Яглом

884. **Понятие энтропии в теории вероятностей.** Хинчин (Noţiunea de entropie în calculul probabilităţilor. Hincin A. I.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1954, **7**, № 2, 32—49 (рум.)

Перевод статьи, напечатанной в журнале «Успехи матем. наук», 1953, 8, № 3 (55), 3—20 (РЖМат, 1954, 3771).

885. **Обобщение нормального закона ошибок.** Горак (Zobecnění normálního zákona chyb. Horák Zdeněk), Casop. pěstov. fys., 1953, **3**, № 5, 348—365 (чеш.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

886. **Аппроксимация распределения для мер рассеивания с помощью степеней χ^2.** Кадуэлл (Approximating to the distributions of measures of dispersion by a power of χ^2. Cadwell J. H.), Biometrika, 1953, **40**, № 3—4, 336—346 (англ.)

Работа состоит из теоретической части и шести таблиц. Рассматривается выборка из нормальной совокупности. Пусть u означает одну из трех статистик этой выборки: ранг, срединное отклонение или первый квазиранг (разность между предпоследним и вторым членами выборки, расположенной в порядке возрастания ее членов). Автор изучает аппроксимацию вида

$$cu^{\lambda} \sim \chi^2,$$

где χ имеет ν степеней свободы. Постоянные c и λ и число ν определяются с помощью сравнения моментов статистики u и моментов величины $(\chi^2/c)^{1/\lambda}$. В табл. 1 приведены значения этих постоянных для ранга и срединного отклонения в выборках объема от $n=2$ до $n=20$ и для первого квазиранга в выборках объема от $n=10$ до $n=30$. Аналогичное приближение (табл. 2) осуществлено для среднего значения m рангов (каждый для выборки объема n). Составлены также 5%-ные и 1%-ные таблицы для отношения максимального значения к минимальному в последовательности k независимых рангов (каждый из выборки объема n), а также для подобного же отношения в последовательности срединных отклонений.

В. С. Михалевич

887. **Несколько приемов сравнения пуассоновских процессов или популяций.** Бернбаум (Some procedures for comparing Poisson processes or populations. Birnbaum Allan), Biometrika, 1953, **40**, ч. 3—4, 447—449 (англ.)

Рассматриваются два процесса Пуассона с параметрами распределения λ_j ($j=1, 2$). Им можно поставить в соответствие последовательность независимых случайных величин $y_i=1$ или 0 в зависимости от того, произойдет ли i-е появление наблюдаемого события A в первом или во втором процессе. При этом $P\{y_i=1\}=(1+\gamma)^{-1}$, $\gamma=\lambda_2/\lambda_1$. Для оценки отношения γ предлагается применять известные методы оценки параметра биномиального распределения. Продолжительность экспериментирования можно оценить, пользуясь следующим замечанием: величина $2\mu T_n$, где T_n — время n-го появления события A в процессе Пуассона с параметром распределения μ, имеет χ^2-распределение с $2n$ степенями свободы.

Тот же прием применим для генеральных совокупностей, в которых некоторый признак распределен по закону Пуассона.

И. И. Гихман

888. **О проверке нормальности.** Чаудхури (A note on testing of normality. Choudhury P.), Sci. and Culture, 1954, **19**, № 9, 453—454 (англ.)

Указывается, что критерием нормальности генеральной совокупности может служить независимость выборочного среднего значения и выборочного стандарта (в случае выборок объема 2 из нормальной совокупности независимость оказывается эквивалентной некоррелированности). В случае k выборок объемов n_r со средними значениями $\bar{x}_r$ и стандартными отклонениями S_r ($r=\overline{1,k}$), извлеченных из совокупности с нулевым средним значением и единичной дисперсией, предлагается критерий нормальности, основанный на статистике $u=\sum_{r=1}^{k} n_r \bar{x}_r S_r$. Если совокупность нормальна, то u имеет так называемое распределение Бесселя и $u/\sqrt{N-k}$ асимптотически нормально при $N-k\to\infty$ (здесь $N=\sum_1^k n_r$).

А. С. Монин

889. **Статистически точный и относительно простой метод оценки параметров логистической функции по наблюденным частотам в биологических испытаниях.** Берксон (A statistically precise and relatively simple method of estimating the bio-assay with quantal response, based on the logistic function. Berkson Joseph), J Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 263, 565—599 (англ.)

Пусть произведено s серий независимых испытаний, причем серия с номером i заключается в том что n_i индивидуумов подвергаются действию дозы x_i некоторого препарата. В результате испытания каждый индивидуум реагирует или не реагирует на этот препарат. Пусть p_i — доля реагирующих индивидуумов в i-й серии. Предполагается что все индивидуумы однотипны и вероятность реагирования любого индивидуума на дозу x равна

$$P(x;\alpha,\beta)=1-Q(x;\alpha,\beta)=$$
$$=1/[1+\exp(-\alpha-\beta\log x)],$$

где α и $\beta>0$ — неизвестные параметры. Функция распределения $P(x;\alpha,\beta)$ называется логистической функцией. В качестве оценок параметров α и β

выбираются такие числа a и b, для которых величина

$$\chi^2(\text{logit}) = \sum_{i=1}^{s} n_i p_i q_i \{\ln(p_i/q_i) - \ln[P(x_i; a, b)/Q(x_i; a, b)]\}^2$$

будет наименьшей. Соответствующие нормальные уравнения линейны относительно a и b, и поэтому вычисление таких оценок значительно проще вычисления оценок наибольшего правдоподобия.

Известно, что 1) величина χ^2 (logit) распределена асимптотически, как χ^2, 2) оценки a и b являются регулярными, достаточными, асимптотически нормальными и асимптотически эффективными (РЖМат, 1953, 1300). В качестве оценок для дисперсий величин a и b указаны дисперсии соответствующих асимптотических нормальных распределений, где положено $P_i = p_i$.

Работа снабжена подробными примерами. Указана методика сравнения силы воздействия двух препаратов по наблюденным частотам. Имеются таблицы функции $l(p) = \ln(p/q)$, таблицы обратной функции, а также таблицы, облегчающие вычисление оценок a и b. В заключительной части работы logit-оценки сравниваются с другими употребляемыми оценками параметров логистической функции. Изложенный метод (так называемая logit-техника) противопоставляется probit-технике. Последняя предназначена для решения той же задачи, но в предположении, что

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\log x} \exp[-(t-a)^2/2\sigma^2]dt$$

(РЖМат, 1954, 1757, 1758). Оказывается, что logit-техника позволяет получать оценки с меньшей затратой вычислительного труда. Вопрос о том, какая из этих двух методик дает результаты, наиболее согласующиеся с действительностью, в статье не затрагивается.

Библиография 47 назв. *Л. Н. Большев*

890. Применение статистических методов оценки к стационарным рядам. Гизекус (Die Anwendung der statistischen Prüfverfahren auf Reihen mit Erhaltungsneigung und kontinuierliche Gesamtheiten. Giesekus Hanswalter), Mitteilungsblatt Math. Statist., 1953, 5, 103—124 (нем.)

Дается оценка среднего, дисперсии и коэффициента корреляции в стационарной последовательности зависимых случайных величин (или случайных векторов) при помощи соответствующих выборочных моментов. *W. Hoeffding*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, №3, 240.

891. Моменты «коэффициента корелляции упорядоченности» τ в общем случае. Сандрум (Moments of the rank correlation coefficient τ in the general case. Sundrum R. M.), Biometrika, 1953, 40, ч. 3—4, 409—420 (англ.)

Пусть дана совокупность пар (x_i, y_i). Пары i-я и j-я называются согласованными, если $(x_i - x_j)\times(y_i - y_j) > 0$. Обозначим вероятность того, что две пары, извлеченные из данной совокупности, окажутся согласованными через p, и введем «коэффициент корреляции упорядоченности»

$$\tau = p - q, \quad q = 1 - p.$$

Пусть p' — выборочная оценка p. В статье выведены формулы для выборочного третьего и четвертого моментов величины p'. *Е. Л. Рвачёва*

892. О преобразованиях, полезных при отыскании распределений, связанных со способом наименьших квадратов. Рао (On transformations useful in the distribution problems of least squares. Rao C. Radhakrishna), Sankhyā, 1953, 12, № 4, 339—346 (англ.)

Пусть n наблюденных величин $y_1, \ldots, y_n$ связаны с k неизвестными параметрами $\tau_1, \ldots, \tau_k$ $(k < n)$ соотношениями

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\tau_j + \delta_i,$$

где δ_i — независимые нормально распределенные случайные ошибки, причем $M\delta_i = 0$, $M\delta_i^2 = \sigma^2$ для всех i; коэффициенты a_{ij} предполагаются заданными. Обозначим через τ_j^* оценки параметров τ_j, полученные способом наименьших квадратов.

Автор вводит некоторое линейное преобразование переменных y_i и τ_j, с помощью которого можно легко находить распределение некоторых функций вида $f(y_1, \ldots, y_n; \tau_1^*, \ldots, \tau_k^*)$. В качестве примеров использования этого метода доказываются теоремы:

1) Если

$$R_n^2 = \min_{\tau} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\tau_j\right)^2$$

при условии, что $\sum_{j=1}^{k} f_{ij}\tau_j = g_j$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $(s < k)$, то величина R_n^2 распределена, как $\sigma^2\chi^2$ с $(n + p)$ степенями свободы, где $p = \text{ранг}\,\|f_{ij}\| - \text{ранг}\,\|a_{ij}'\|$ и

$$a_{ij}' = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n \\ f_{i-n,j}, & \text{если } n < i \leqslant n + s. \end{cases}$$

2) Отношение $U = R_q^2/R_n^2$ $(q < n)$ в случае отсутствия уравнения связи имеет плотность $B(u; q - \rho/2; (n - q - r + \rho)/2)$, где r и ρ — ранги матриц $\|a_{ij}\|$, $i = 1, \ldots, n$, и $\|a_{ij}\|$, $i = 1, \ldots, q$, соответственно. *Л. Н. Большев*

893. Выборочное исследование эффективности взвешивания обратными оценками дисперсий. Кокран, Кэрролл (A sampling investigation of the efficiency of weighting inversely as the estimated variance. Cochran William G., Carroll Sarah Porter), Biometrics, 1953, 9, № 4, 447—459 (англ.)

Дано k независимых случайных величин x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, нормально распределенных с одним и тем же средним μ и различными дисперсиями

σ_i^2. Если σ_i^2 известны, то принято считать наилучшей оценкой μ взвешенное среднее

$$\bar{x}_w = \sum_i w_i x_i / w,$$

где $w_i = 1/\sigma_i^2$, $w = \sum w_i$.

Если σ_i^2 неизвестны, но мы имеем их оценки, полученные по n_i наблюдениям, то по аналогии можно взять в качестве оценки для μ

$$\bar{x}_{\hat{w}} = \sum_i \hat{w}_i / \hat{w},$$

где $\hat{w}_i = 1/s_i^2$, $\hat{w} = \sum \hat{w}_i$.

Кокран (Cochran W. G., J. Roy. Statist. Soc. Suppl., 1937, 4, 102—118) показал, что при $k \to \infty$ распределение $\bar{x}_{\hat{w}}$ стремится к нормальному распределению со средней μ и дисперсией

$$V(\bar{x}_{\hat{w}}) = \frac{n-2}{(n-4)w}, \qquad (1)$$

когда $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$, $n > 8$ и σ_i^2 ограничены снизу и сверху. Когда n_i не равны, предельная дисперсия имеет более сложный вид:

$$V(\bar{x}_{\hat{w}}) = \frac{\sum_i \frac{n_i w_i}{(n_i-2)(n_i-4)}}{\left[\sum_i \frac{n_i w_i}{n_i - 2}\right]^2}. \qquad (2)$$

Мейер (Meier P., Biometrics, 1953, 9, 59—73) дал формулу

$$V(\bar{x}_{\hat{w}}) = \frac{1}{w}\left[1 + \frac{2}{w^2}\sum \frac{1}{n_i} w_i (w - w_i)\right], \qquad (3)$$

пригодную для любых k, если пренебречь членами порядка $1/n_i^2$.

Формулы (1), (2), (3) непригодны для разыскания средней квадратичной ошибки средней $\bar{x}_{\hat{w}}$, так как зависят от неизвестных w_i. Но Кокран показал, что несмещенная оценка предельной дисперсии равна

$$\frac{n}{(n-4)\hat{w}}, \qquad (4)$$

когда n_i одинаковы, и Мейер аналогично установил, что несмещенная оценка предельной дисперсии равна

$$\frac{1}{\hat{w}}\left[1 + \frac{4}{\hat{w}^2}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i}\hat{w}_i(\hat{w} - \hat{w}_i)\right], \qquad (5)$$

если пренебречь членами порядка $1/n_i^2$.

В реферируемой работе даются результаты выборочного исследования, выполненного Сарой Кэррол и относящегося главным образом к формулам Мейера (3) и (5). Исследование показывает, что формула (3) дает удовлетворительные результаты для $k \leqslant 5$ и $n \geqslant 6$; она удовлетворительна для любого k, если $n \geqslant 12$. При таком же условии для n удовлетворительна и формула (5); она становится удовлетворительной для $n \geqslant 8$ если заменить в ней n_i на

$$n_i' = n_i - \frac{4(k-2)}{k-1}.$$

Эта замена была найдена эмпирически.

Примечание референта. В работе референта о неравноточных измерениях (Докл. АН УзССР, 1949, № 1, 3—6) указан способ, дающий точную оценку измеряемой величины μ по неравноточным рядам измерений любого одинакового объема, если отдельные измерения имеют нормальные распределения со средней μ. *В. И. Романовский*

894. Соотношение ортогональности в анализе дисперсии. I. Огасавара, Такахаси (Orthogonality relation in the analysis of variance. I. Ogasawara Tôziro, Takahashi Masayuki), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A16**, № 3, 457—470 (англ.)

Обычное в дисперсионном анализе разложение общей суммы квадратов на сумму независимых квадратичных форм исследуется с формальной точки зрения. Для всякой данной классификации $\mathfrak{A}$ соответственная сумма квадратов между классами $S_{\mathfrak{A}}$ представляет квадратичную форму с некоторой матрицей проектирования. Это соотношение дает повод поставить в соответствие сумме $S_{\mathfrak{A}}$ оператор проектирования $P_{\mathfrak{A}}$ такой, что $\|Px\|^2 = S_{\mathfrak{A}}$. Таким же образом оператор проектирования $P_{\mathfrak{AB}}$ ассоциируется с дисперсией взаимодействия типа $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Работа посвящена исследованию свойств этих операторов и заключает большое число лемм и теорем. Ввиду сложности определений и обозначений приведем для примера лишь одну теорему (теорема 17): пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ нетривиальны. Тогда $P_{\mathfrak{AB}}$, $P_{\mathfrak{BC}}$, $P_{\mathfrak{CA}}$ взаимно ортогональны тогда и только тогда, когда $\perp(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ или когда $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ регулярны и $d(\mathfrak{A}) = d(\mathfrak{B}) = d(\mathfrak{C}) = 1$. Классификация $\mathfrak{A}$ называется нетривиальной, если она не состоит из одного только класса. $\perp(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ обозначает, что $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ортогональны, т. е. частоты n_{A_i}, n_{B_i}, n_{C_i} классов A_i, B_i, C_i в них удовлетворяют соотношению

$$n_{A_i B_j C_k} / n_{A_i} n_B n_{C_k} = 1/N^2,$$

где N — число рассматриваемых элементов. $d(\mathfrak{A})$ $d(\mathfrak{B})$ и т. п. обозначают число степеней свободы соответственных классификаций. *В. И. Романовский*

895. Один метод анализа двойных классификаций Вильямс (A method of analysis for double classifications. Williams E. J.), Austral. J. Appl. Sci., 1953, **4**, № 3, 357—370 (англ.)

896. Несуществование некоторых аффинно-разрешимых балансированных неполных блоков. Шриханде (The non-existence of certain affine resolvable balanced incomplete block designs.

Shrikhande S. S.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 3, 413—420 (англ.)

897. **О соотношении между планами с неполными сбалансированными блоками и планами с частично сбалансированными неполными блоками. Рой** (A note on the relation between «bib» and «pbib» designs. Roy Purnendu Mohon), Sci. and Culture, 1953, **19**, 40—41 (англ.)

898. **Последовательная минимаксная процедура разыскания максимумов. Кифер** (Sequential minimax search for a maximum. Kiefer J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 3, 502—506 (англ.)

899. **Некоторые классы статистических разрешающих правил. Конейн** (On certain classes of statistical decision procedures. Konijn H. S.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 3, 440—448 (англ.)

900. **Замечание о характеристиках минимаксных процедур. Конейн** (A remark on the characterization of minimax procedures. Konijn H. S.), Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1953, **4**, 103—105 (англ.)

901 К. **Курс статистики с обширным математическим приложением. Джини.** Пер. с итал. (Curso de estadistica con un extenso apendice matematico. Gini (Conrado). Traduccion y adaptacion del italiano 2 ed., XX+555 pp., 182 figs. Edititorial «Labor», Barcelona, 1953, 165 ptas), Iberica, 1953, **18**, № 266, 280 (библ.)

902 К. **Методы и теория выборочных исследований. Хансен, Гурвиц** (Sample survey methods and theory. Hansen Morris H., Hurwitz William N., vol. I, 1953, 638 pp., 8.00 doll.; vol. 2, 1953, 332 pp., 7.00 doll., Wiley Publications in Statistics, Walter A. Shewhart, editor), Amer. Scientist, 1953, **41**, № 4, 645 (библ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

903 К. **Теория вероятностей и теория информации с приложениями к радиолокации. Вудуорд** (Probability and information theory, with applications to radar. Woodward P. M., 128 pp., Pergamon Science Series, London, 1953, 21 s.) (англ.)

Книга содержит 7 глав, из которых 4 первые посвящены общетеоретическим вопросам подготовительного характера, а 3 последние — непосредственно радиолокационным задачам. Изложение ведется кратко и образно, с большим числом простых, наглядных и поучительных примеров. Во всех разделах автор не стремится к полноте охвата, ограничиваясь постановкой и решением лишь первых основных задач и вводя много упрощающих предположений, так что книга приобретает характер введения в статистические проблемы радиолокации.

Глава 1 содержит введение в теорию вероятностей, включая общее понятие энтропии. В главе 2 излагаются общие основы спектрального анализа, причем особое внимание уделяется «выборочному методу, связанному с известной теоремой Котельникова о функциях с ограниченным спектром, позволяющей приписывать соответствующим системам определенное конечное число степеней свободы. Специальному исследованию подвергается случай «белого» гауссова шума. Глава 3 посвящена общим основам теории информации, излагаемым в духе известных работ Шеннона. В главе 4 рассматривается общая статистическая теория приема сигналов при наличии шума. Основной мыслью автора, последовательно проводимой и в дальнейших главах, является здесь то самоочевидное (и тем не менее часто забываемое) замечание, что при любой обработке принятого материала мы не можем с его помощью узнать о поданном сигнале ничего большего, как условный (при данном принятом материале) закон распределения различных возможных вариантов этого поданного сигнала. Характер этого закона, однако, зависит от устройства приемника, и основной целью статистической теории является отыскание оптимальных принимающих устройств. Здесь также детально рассматривается случай гауссовых шумов. Исследуется важный случай, когда сигнал, кроме передаваемой информации, содержит еще неизвестные параметры, которые трактуются как случайные величины. В основе всех конструкций лежит, как обычно, теорема Байеса, которую автор называет «принципом обратной вероятности»; особый параграф посвящен дискуссии известных трудностей в применении этой теоремы, возникающих вследствие того, что априорные распределения, как правило, нам неизвестны.

Глава 5 содержит элементарную теорию радиолокационного приема, в которой единственной искомой величиной является время запаздывания. Автор ограничивается простейшими предположениями: единственность и неподвижность цели, гауссовы шумы; при этом указывается, что трактовка более общих случаев теми же методами принципиально возможна, но требует некоторых усложнений. В главе 6 в основном исследуется степень точности результатов предшествующей главы и зависимость этой точности от важнейших входящих в задачу параметров. Один из параграфов посвящен специальному анализу порогового эффекта; автор считает одной из наиболее интересных особенностей излагаемой теории — ее предсказание отчетливого появления этого эффекта при определенной функциональной связи между параметрами.

В последней, седьмой, главе рассматривается задача выбора посылаемого сигнала. Разумеется, в радиолокации этот выбор не имеет столь фундаментального значения, как в случае передачи сообщений, так как радиолокационный сигнал сам в себе никакой информации не несет. Однако вид подаваемого сигнала все же существенно важен, так как может оказать влияние на трудность обработки принятого материала, а также на точность выводов. Специальный расчет дается для сигналов гауссовой формы.

Следует отметить, что идеи теории информации, изложенные в главе 3, в дальнейшем находят себе применение только в одном параграфе 6.5, причем

выводы этого параграфа не связаны ни с какими другими разделами книги. *А. Я. Хинчин*

904 К. Обзор статистических методов, применяемых в текстильной промышленности. Брирли, Кокс (An outline of statistical methods for use in the textile industry. Brearley Alan, Cox D. R., 3-rd ed., 77 pp., tables, diagrs, bibliogr., Headingley, Leeds 6. Wool Industries Research Foundation (unpriced), Torridon, 1954), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 225, 6 (библ.)

905 К. Статистические методы в электротехнике. Белл (Statistical methods in electrical engineering. Bell D. A., VIII+175 pp., tabl., diagrs, bibliogr., C. and H., 1953, 25 s.), Aslib Book-List, 1954, **19**, № 3, 21 (библ.)

906 К. Статистическая теория крайних значений и ее практические применения. Гумбель (Statistical theory of extreme values and some practical applications (A Ser. of Lectures). Gumbel Emil J., VIII+51 pp., Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., Washington, U. S. Government Printing Office, 1954) (англ.)

907 РЕЦ. Статистическое исследование мелких частиц. Херман, Смит (Fine particles and statistics. Herdan G., Smith M. L., 520 pp., Elsevier Publishing Co., Amsterdam, 1953, 70 s.) [**Рецензия: Хоксли** (Hawksley P. G. W.), Monthly Bull., Brit. Coal Utilis. Res. Assoc., 1953, **17**, № 12, 531—532 (англ.)]

См. также: 558 К, 636, 654, 691, 767

ГЕОМЕТРИЯ

908. Геометрическое место точек, связанное с окружностью, проходящей через основания перпендикуляров, опущенных на стороны данного треугольника. I. Схю (Meetkundige plaats, die verband houdt met de omgeschreven cirkel van de voetpuntendriehoek. I. Schuh Fred), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 1, 92—103 (голл.)

Из произвольной точки P плоскости треугольника опущены перпендикуляры PD, PE, PF на его стороны. Доказывается, что геометрическое место точек P, для которых окружность, описанная около треугольника DEF (подерного треугольника), имеет данный радиус, есть кривая шестого порядка, имеющая трехкратными циклические точки плоскости. Подробно рассматриваются особые точки и форма кривой в различных частных случаях. *С. И. Зетель*

909. О параболическом пучке окружностей, содержащем окружность, описанную около треугольника. Л'Эрме (Über parabolische Kreisbüschel, die den Umkreis eines Dreiecks enthalten. L'Hermet Curt), Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, 1953/1954, **3**, Math.-naturwiss. Reihe, № 1, 309—310 (нем.)

Дан параболический пучок окружностей, в одну из которых вписан треугольник ABC так, что общая точка окружностей пучка не является его вершиной. На прямой AB различаются точки касания ее с окружностями пучка: внутренняя (на отрезке AB) и внешняя (собственная или несобственная). Аналогично для прямых BC, CA. Доказывается, что три внутренние (одна внутренняя и две внешние) точки касания принадлежат тройке чевиан треугольника ABC; две внутренние и одна внешняя (три внешние) точки касания лежат на одной прямой. *А. С. Смогоржевский*

910. О кратчайшем расстоянии между двумя прямыми в трехмерном пространстве. Кертес, Селе (On the smallest distance of two lines in 3-space. Kertész A., Szele T.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 308—309 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

С помощью векторной алгебры дается элементарное доказательство известной теоремы о том, что для двух непараллельных прямых в E_3 существует единственный общий перпендикуляр, отрезок которого между точками пересечения с данными прямыми является кратчайшим расстоянием между ними. Отмечается, что теорема и ее доказательство сохраняются для n-мерного пространства ($n > 3$), если прямые не пересекаются. *В. Ф. Рогаченко*

911. Заметки о конических сечениях. 17. Теорема Сальмона (Notes on conics. 17. Salmon's theorem E. H. N.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 324, 125—126 (англ.)

Теореме Сальмона: Если AP — расстояние точки A до поляры точки B относительно окружности с центром O, а BQ — расстояние точки B от поляры точки A, то $OA \cdot BQ = OB \cdot AP$ — дается новая формулировка: Если прямая AB пересекает поляры точек A и B в точках F и G, то отношение степеней точек A и B относительно окружности равно $AF \cdot AG / (BF \cdot BG)$.

Рассматриваются приложения к метрической геометрии конических сечений. Это приводит с помощью теоремы Карно к предложению: Если два треугольника сопряжены относительно конического сечения, то шесть точек пересечения несоответственных сторон лежат на некотором коническом сечении и шесть прямых, соединяющих несоответственные вершины, касаются некоторого конического сечения. *В. Ф. Рогаченко*

912. Тензорное исчисление с элементарной точки зрения. Варини (Il calcolo tensoriale da un punto di vista elementare. Varini Bruno), Archimede, 1954, **6**, № 2, 45—52 (итал.)

Статья содержит элементарное введение к определению понятия тензора. *Г. И. Кручкович*

913. Кривые, ассоциированые с четырехсторонником. Гийотен (Courbes associees a un qua-

drilaterè Guillotin M. R.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953 22, 327—340 (франц.)

914. Наглядная геометрия III. Ельмслев (La géométrie sensible. III. Hjelmslev Johannes), Enseign. math., 1942—1950, **39**, 210—236 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Части I и II см. Enseign. math., 1940, **38**, 7—27; 1942 **38**, 294—322. Очерк идей автора о преподавании геометрии в пространстве, от простейших понятий таких, как кубы, призмы и их объемы, до достаточно развитого векторного анализа и сферической геометрии. *H. Busemann*

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 11, 1114.

915. Построение центров кривизны некоторых плоских кривых. Воронков И. М., Сб. статей Всес. заоч. политехн. ин-та, № 6, 89—94

Выводится известная формула радиуса кривизны плоской кривой $\rho = \pm rdr/dh$, где $r = OM$ — радиус-вектор точки M кривой, h — расстояние от полюса O до касательной к кривой в точке M.

Устанавливается функциональная зависимость r от h для параболы $r = 2h^2/p$, для эллипса $r^2 = a^2 + b^2 - a^2b^2h^{-2}$, для архимедовой спирали $a^2 + r^2 = r^4h^{-2}$, для гиперболической спирали $h^{-2} - r^{-2} = a^{-2}$ и показывается применение формулы кривизны к построению центров кривизны в указанных примерах. *В. С. Люкшин*

916. Квадратура параболы: старинная теорема в современной форме: Бойер (The quadrature of the parabola: an ancient theorem in mobern form. Boyer Carl), Math. Teacher, 1954, **47**, № 1, 36—37 (англ.)

Методом координат доказывается формула квадратуры параболы, данная Архимедом (Гурса Э., Курс математического анализа, т. 1, ч. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1933, 151—152). *Ю. Е. Пензов*

917. Метод доказательства тригонометрических тождеств: Чеймберлин, Вулф (A decision method for trigonometric identities. Chamberlin Eliot, Wolf James), Math. Mag., 1953, **27**, № 2, 75—77 (англ.)

Дается метод, несколько облегчающий доказательство тригонометрических тождеств.
Пусть $P(x)$ — полином от $\sin a_i x$, $\cos a_i x$ $(i = 1,\ldots,n)$, где a_i — рациональные числа. Преобразовав $P(x)$ к форме

$$q_1(\sin(x/p))\cdot\cos(x/p) + q^2(\sin(x_0/p)),$$

где p — некоторое целое число, а $q_1(v)$ и $q_2(v)$ — полиномы, автор устанавливает, что $P(x) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда коэффициенты полиномов $q_1(v)$ и $(q_2)v$ равны нулю.

Рассматривается также случай, когда a_i — произвольные действительные числа. *Г. П. Лапин*

918. Некоторые ограниченные кривыми поверхностями трехмерные области, объемы которых могут быть вычислены точно. Тенка (Particolari campi a tre dimensioni cubabili esattamente limitati da superfici curve. Tenca Luigi), Boll. Unione mat. ital. 1953, **8**, № 3, 337—342 (итал.)

Кривая, заданная на полусфере единичного радиуса уравнением $\omega = m\varphi$ (ω, ρ — сферические координаты), отсекает от неё часть, площадь которой равна m. Объем тела, ограниченного этой частью и частью цилиндра, проходящего через эту кривую внутри полусферы, равен $2m/9$. Если $m = 2/n$, то, дополняя это тело симметричным, получим шар с n цилиндрическими отверстиями, имеющий поверхность, равную 8, и объем, равный $16\pi/9$, при любом целом $n \geqslant 2$. В предельном случае ($m = 4$; спираль Паппа) это свойство также имеет место.

В работе встречаются опечатки (см. стр. 340, строки 5, 6 сверху). *Р. Н. Щербаков*

919. Математические исследования советского математика В. Ф. Кагана в области метрической двойственности. Врынчану Cercetările matematicianului sovietic V. F. Cagan in domeniul dualităţii metrice. Vrânceanu Gh.), Gas. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 2, 55—62 (рум.)

920 Д. Геометрическая теория дифференциальных уравнений в трудах Д. М. Синцова. Наумов И. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1954

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

921. Об одной проблеме Дарбу, относящейся к механике сплошной среды. Тоноло (Sopra un problema di Darboux relativo alla meccanica dei mezzi continui. Tonolo Angelo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 578—582 (итал.)

Разбирается вопрос, поставленный и решенный Дарбу (Darboux G., Proc. London Math. Soc., 1901, **32**, 377—383): Среди преобразований

$$X = f(x, y, z),\ Y = \varphi(x, y, x),\ Z = \psi(x, y, z).$$

преобразующих три линейных элемента в точке $m(x, y, z)$, попарно ортогональных между собой, в параллельные им элементы в точке $M(X, Y, Z)$, найти такие, чтобы полученный таким образом в точке M триэдр имел грани, расположенные в касательных плоскостях трех попарно ортогональных поверхностей.

Дарбу приводит решение вопроса к дифференциальному уравнению в частных производных 3-го порядка. Автор получает уравнение Дарбу тензорным методом. *В. А. Яблоков*

922. Математическое исследование спиральных составных кривых. Хиккерсон (A mathematical examination of spiraled compound curves. Hickerson T. F.), J. Elisha Mitchel Scient Soc., 1953, **69**, № 2, 108—115 (англ.)

Две дуги AC и CB окружностей разных радиусов с общей точкой C заменяются переходной спиралью AB_1 с равномерно изменяющейся кривизной, линейной относительно длины дуги спирали; радиальное отклонение $p = BB_1$ параллельно общему направлению радиусов окружностей в точке C. Для данной длины дуги спирали AB_1 определяется p точно и приближенно в виде ряда по степеням номинального «спирального угла» и находятся различные геометрические элементы: полная кривизна

в текущей точке, хорда AB_1; длины касательных в точках A, B_1 и другие дифференциальные элементы. *В. С. Люкшин*

923. Анализ геометрии некоторых резцов, применяемых для скоростного нарезания резьбы. Шнайдерман И. Я., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1953, **12**, 164—173

Рассматривается вопрос об искажении профиля резьбы при принятой геометрии резцов и приводится анализ геометрии чистовых резцов конструкции Р. Бирюкова.

Определяются основные углы резца и показывается, что условия резания левой и правой режущих кромок неодинаковы. Искажение профиля резьбы объясняется наличием угла наклона режущих кромок. Указывается, что профиль резьбы в осевой плоскости является криволинейным, и дается способ его построения по точкам. *В. С. Люкшин*

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

924. Некоторые типы плоских и косых четырехугольников в пространстве Лобачевского. Скопец З. А., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 2 (60), 179—183

Рассматриваются плоские и косые четырехугольники пространства Лобачевского, у которых сумма двух сторон равна сумме двух других сторон. Они могут быть двух типов в зависимости от того, берется ли сумма смежных сторон или противоположных. Плоский четырехугольник первого типа характеризуется требованием, чтобы внешние биссектрисы в общих вершинах слагаемых сторон и внутренние в двух других вершинах принадлежали одному пучку. Для второго типа все внутренние биссектрисы должны принадлежать одному эллиптическому пучку. В косом четырехугольнике это условие заменяется требованием, чтобы стороны были параллельны одной плоскости. Эта теорема распространяется на $(n+1)$-угольники в n-мерном пространстве Лобачевского. *М. А. Джавадов*

925. Кинематическая интерпретация дважды параболической геометрии на плоскости. Ди-Ной (Interpretazione cinematica d'una geometria due volte parabolica nel piano. Di Noi Salvatore), Archimede, 1953, **5**, № 4—5, 145—155 (итал.)

Два наблюдателя o и O наблюдают равномерное движение точки по прямой или другой незамкнутой линии. x и X—моменты времени, отсчитываемые обоими наблюдателями, а y и Y — расстояния движущейся точки от выбранных начал отсчета o и O. Тогда зависимости

$$X = x + k;\ Y = v_0 x + y + c \qquad (1)$$

выражают принцип относительности Галилея.

Числа (x, y), (X, Y) принимаются за декартовы координаты точек p и P, представляющих одно и то же событие с точки зрения обоих наблюдателей. Точки с одинаковыми абсциссами называются одновременными. Диаграммы движений одной и той же точки для обоих наблюдателей — прямые r и R, причем R называется преобразованием r посредством формул (1). Соответствие между r и R является коллинеацией, притом аффинитетом.

Инвариантами преобразования будут разность $x' - x$, которая называется направленной длиной отрезка, и разность угловых коэффициентов прямых r и r', представляющих два равномерных движения, которая называется направленным углом двух прямых.

В этой кинематической интерпретации геометрии имеют место теоремы: а) наибольшая сторона треугольника, содержащая точку, единовременную противоположной вершине, равна сумме двух других сторон; б) равнобедренный треугольник обязательно будет равносторонним; в) прямая не является геодезической линией плоскости, если понимать ее как кратчайшую; г) углы треугольника пропорциональны противолежащим сторонам; д) наибольший угол треугольника равен сумме двух других углов; е) сумма углов треугольника, как и сумма его сторон, не ограничена сверху, но имеет нижней границей нуль и т. д.

В дальнейшем автор рассматривает два обобщения этой интерпретации, допуская, что 1) интервалы времени между двумя событиями имеют для наблюдателей o и O противоположные знаки и что 2) эти интервалы пропорциональны. Последняя гипотеза приводит к уравнениям

$$X = ax + n;\ Y = v_0 x + by + c, \qquad (2)$$

заменяющим уравнения (1). Это равносильно допущению, что оба наблюдателя пользуются разными метрами. В заключение кинематическая интерпретация, в сжатом изложении, распространяется на проективную плоскость с фиксированной прямой и точкой на ней. В этой интерпретации все метрические соотношения дуальны ввиду дуальности самому себе абсолюта плоскости. В дальнейшем выявляется наличие в этой интерпретации трех типов подобия и т. д. *Н. М. Несторович*

926. Об аффинно-микродезарговых плоскостях. Ломбардо-Радиче (Sui piani microdesarguesiani affini. Lombardo-Radice Lucio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **15**, № 5, 264—271 (итал.)

Доказывается, что все отличные от единицы элементы группы специальных гомологий (т. е. гомологий с несобственными осью и центром) веблен-веддербарновой (в.-в.) (в терминологии автора аффинной-микродезарговой) плоскости имеют один и тот же порядок (конечный или бесконечный). Если порядок конечен, то он является простым числом. Отсюда выводится, что каждая в.-в. плоскость содержит подплоскость, построенную над конечным полем простого порядка или над полем рациональных чисел. В частности, каждая конечная в.-в. плоскость порядка $p^2 + p + 1$, где p — простое число, является дезарговой. На алгебраическом языке приведенная выше теорема выражает, что всякое в.-в. тело является расширением конечного поля простого порядка или поля рациональных чисел. Все доказательства имеют геометрически-групповой характер. *Л. А. Скорняков*

927. О некоторых моделях конечной, плоской проективной геометрии. Ломбардо-Ра-

диче (Su alcuni modelli di geometrie proiettive piane finite. Lombardo-Radice Lucio), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 370—373 (итал.)

Упорядоченные пары элементов поля Галуа $C/(p)$ и линейные уравнения с двумя неизвестными, коэффициенты которых принадлежат $C/(p)$, можно трактовать как точки и прямые конечной (finito) евклидовой плоскости π^*. Введением несобственной прямой L_∞ (обычным путем через параллелизм прямых) плоскость π^* может быть расширена в проективную плоскость π, которая содержит p^2+p+1 точек и столько же прямых, причем на каждой прямой лежит $(p+1)$ точка и через каждую точку проходит $(p+1)$ прямая.

В плоскости π^* рассматривается «правильный» p-угольник $\mathscr{P}_1$ с вершинами

$$P_1^{(1)}(1,1);\ P_2^{(1)}(1—1,2);\ P_3^{(1)}(1—1—2,3);\ \ldots$$

$$\ldots;\ P_i^{(1)}\left(1-\sum_0^{i-1} k,\ i\right);\ \ldots$$

$$\ldots;\ P_p^{(1)}\left(1-\sum_0^{p-1} k,\ p=0,\right),\ P_r^{(1)}\equiv P_s^{(1)},$$

если $r\equiv s \pmod p$. Приводятся без доказательства некоторые свойства этого многоугольника. В частности, его «центром» оказывается несобственная точка $P_x^{(\infty)}$ прямой $y=\text{const}$.

Пусть p_i — сторона $P_i^{(1)}P_{i+1}^{(1)}$ многоугольника. Строятся еще p прямых p_i, каждая из которых соединяет точки $P_i^{(1)}$ и $P_{i+(p-1)/2}^{(1)}$. После этого определяются точки $P_i^{(h)}$ пересечения прямых p_i и p_{i+h} $(i=1,\ldots,p;\ h=1,\ldots,(p-1)/2)$ и точки $\overline{P}_i^{(h)}$ пересечения прямых p_i и $\overline{p}_{i+h}$ $(i=1,\ldots,p;\ h=1,\ldots,(p-1)/2)$. При фиксированном h точки $P_i^{(h)}$ образуют «правильный» p-угольник» $\mathscr{P}_h$ рода h с «центром» в $P_x^{(\infty)}$. При этом сторонами его являются прямые, соединяющие точки $P_i^{(h)}$ и $P_{i+h}^{(h)}$. При $h=1$ получается исходный многоугольник $\mathscr{P}_1$. Аналогично строится «правильный многоугольник» $\overline{\mathscr{P}}_h$ с теми же свойствами. При этом вершины $\overline{\mathscr{P}}_i^{((p-1)/2)}$ звездчатого многоугольника рода $(p-1)/2$ совпадают с вершинами $P_i^{(1)}$ первоначального многоугольника (выпуклого). На обыкновенной евклидовой плоскости для правильного p-угольника Q_1 с вершинами $Q_1^{(1)},\ldots,Q_p^{(1)}$ и центром O можно повторить все предыдущие рассуждения. При этом получаются $(p-3)/2$ правильных многоугольников $Q_2,\ldots,Q_{(p-1)/2}$, внешних к выпуклому многоугольнику Q_1, и $(p-3)/2$ многоугольников $\overline{Q}_1,\ldots,\overline{Q}_{(p-3)/2}$, внутренних к многоугольнику Q_1. Вводя еще в рассмотрение середины сторон N_iN_j многоугольников Q_1 и $\overline{Q}_1$ и аналогично — «середины» сторон $M_i\overline{M}_j$ (через полусуммы координат концов) многоугольников $\mathscr{P}_1$ и $\overline{\mathscr{P}}_1$, автор устанавливает соответствие между плоскостью π^* и построенными точками евклидовой плоскости, в котором точкам $P_i^{(h)}(\overline{P}_j^{(h)})$, $M_i(\overline{M}_j)$ соответствуют точки $Q_i^{(h)}(\overline{Q}_j^{(h)})$, $N_i(\overline{N}_j)$. При некоторых искусственных соглашениях это соответствие оказывается коллинеарным, сохраняющим параллелизм, причем точке $P_x^{(\infty)}$ соответствует точка O; оно будет взаимно однозначным, если соответствующие точки $Q^{(h)}$ и $\overline{Q}^{(k)}$ идентифицированы.

Построенную модель автор считает возможным приложить к изучению проективитетов плоскости π (главным образом тех, которые сохраняют или переводят друг в друга определяющие элементы), а также к изучению вопроса о существовании конечной геометрии с p^2+p+1 точками (и с таким же числом прямых) в том случае, когда p не является ни простым числом ни степенью простого числа. Этот вопрос до сих пор еще остается открытым. *Н. И. Кованцов*

928. О численном решении задачи обратного пересечения или задачи Снеллиуса на плоскости Гаусса — Боага. Альбани (Sulla risoluzione numerica del problema dell'intersezione inversa o problema di Snellius sul piano di Gauss — Boaga. Albanig. Francesco), Geom. ital., 1954, 9, № 1, 2—4 (итал.)

Рассматривается задача определения гауссовых координат точки P земной поверхности (X — расстояние точки от экватора по ее меридиану, Y — расстояние по экватору от меридиана Гринвича до меридиана точки) по известным координатам точек A, B, C и углам $\angle APB=\alpha$ и $\angle CPB=\beta$.

Автор получает формулы

$$Y_P=\frac{[Y_B\operatorname{tg}(MN)+Y_M\operatorname{ctg}(MN)+X_B-X_M]}{\operatorname{tg}(MN)+\operatorname{ctg}(MN)},$$

$$X_P=(Y_P-Y_M)\operatorname{ctg}(MN)+X_M,$$

где точка M (соответственно N) — конец диаметра BM (соответственно BN) окружности, проходящей через точки B, P, A (соответственно B, P, C), (MN) — азимут прямой MN (проходящей через P). Координаты точки M находятся по формулам

$$X_M=X_A-(Y_B-Y_A)\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$Y_M=Y_A+(X_B-X_A)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Г. И. Кручкович

929. Фундаментальные геометрии и четырехмерные неевклидовы геометрии на римановой гиперсфере пространства S_5. Раффаэле (Geometrie fondamentali e geometrie non euclidee quadrimensionali sulla ipersfera di Riemann dell'S_5. Raffaele Polemio), Ricerca, Napoli, 1953, 4, № 1—2, 52—58 (итал.)

Предварительное сообщение о некоторых результатах, относящихся к геометриям с фундаментальной группой и к четырехмерным неевклидовым геометриям в их представлениях на гиперсфере пространства S_5. *Резюме автора*

930. Еще об одной специальной инволюции Гейзера. Годо (Ancora sopra una particolare involu-

zione di Geiser. Godeaux Lucien), Rend. Seminar. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1952, **22**, 1—2 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Показывается, что критика профессора Турри результата, установленного в заметке с тем же названием (Rend. Seminar. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1952, **21**, 1—3) не имеет значения. *Резюме автора*

931. О классификации инволюторных преобразований плоскости. Турри (Sulla classificazione delle trasformazioni involutorie del piano. Turri Tullio), Rend. Seminar. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1952, **22**, 16—26 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

932. Плоское представление инволюций на кубической поверхности. Пизано (Rappresentazione piana di involuzioni sopra superfici cubiche. Pisano Paolo), Rend. Seminar Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1952, **22**, 27—33 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

933. О представлении автополярных треугольников конического сечения точками в трехмерном пространстве. Герретсен (Sulla rappresentazione dei triangoli autopolari di una conica con i punti di uno spazio a tre dimensioni. Gerretsen J. C. H.), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 338 (итал.)

Разюме доклада на IV итальянском математическом конгрессе.

934. Об основаниях гиперболической тригонометрии. Герретсен (Sui fondamenti della trigonometria iperbolica. Gerretsen J. C. H.), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 338 (итал.)

Резюме доклада на IV итальянском метематическом конгрессе.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

935. О кривой четвертого порядка, связанной с тетраэдром. Рангасвами-Айер (On a quartic curve associated with a tetrahedron. Rangaswami Aiyer K.), Math. Student, 1953, **21**, № 3, 4, 87—96 (англ.)

Рассматривается кривая четвертого порядка, определяемая следующим образом: каждая пара противоположных ребер тетраэдра в трехмерном евклидовом пространстве определяет линейчатую поверхность второго порядка, прямолинейные образующие которой являются линиями пересечения взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих через данные ребра; рассматриваемая кривая является общей линией пересечения трех поверхностей второго порядка, определяемых тетраэдром. Находится ряд метрических свойств этой кривой. *Б. А. Розенфельд*

936. О топологии пространственных алгебраических кривых, расположенных на квадрике. Капуто (Sulla topologia delle curve algebriche sghembe situate sopra quadriche. Caputo Michele), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 301—302 (итал.)

Краткое резюме работы автора (Ann. Univ. Ferrara, 1952, сер. 7, **1**, 111—125). Приведены теоремы о замкнутых ветвях алгебраической кривой, расположенной на гиперболоиде; утверждается, что дана полная топологическая классификация кривых 4-го, 5-го и 6-го порядков только с простыми двойными точками, расположенных на квадрике. *В. В. Морозов*

937. Об алгебраических кривых с полной группой монодромии. Амато (Sulle curve algebriche a gruppo di monodromia totale. Amato Vincenzo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **1**, 164—166 (итал.)

Как простое следствие основной теоремы теории Галуа приводится такой результат: алгебраическая кривая

$$f(z, u) = 0 \qquad (1)$$

степени $n = \rho r$ относительно u, группа монодромии которой есть нормализатор G_S подстановки $S = (u_1, \ldots, u_r) \ldots (u_{(\rho-1)r+1}, \ldots, u_n)$, представляет проекцию на плоскость $y = 0$ пересечения цилиндра

$$\varphi(z, y) = 0 \qquad (2)$$

степени ρ относительно y, группа монодромии которого относительно y есть симметрическая группа ρ-й степени, и некоторой поверхности

$$\psi(z, y, u) = 0 \qquad (3)$$

степени r относительно u, группа монодромии которой относительно u — циклическая. Обратно, кривая (2) с симметрической группой монодромии есть проекция на плоскость $u = 0$ пересечения цилиндра (1) и поверхности (3). В частном случае, когда $r = 2$ и корни (1) связаны соотношениями $u_1u_2 = \ldots = u_{2\rho-1}u_{2\rho} = 1$, (3) обращается в цилиндр $u^2 - yu + 1 = 0$. Это результат известный (Bianchi L., Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois, Pisa, 1900, 160—162). *В. В. Морозов*

938. Диаметральные свойства алгебраических поверхностей. Пьяццолла-Белок (Proprietà diametrali delle superficie algebriche. Piazzolla-Beloch Margherita), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 425—430 (итал.)

Известная теория диаметров алгебраических кривых как геометрического места «центров средних расстояний» (см., например, Wieleitner H., Algebraische Kurven. Zweiter Teil, Allgemeine Eigenschaften, 1919, 31—33; а также работу автора, Teoria diametrale delle curve algebriche piane. Ann. Univ. Ferrara, 1949, 95 pp.) распространяется в статье на случай алгебраических поверхностей. Диаметральной плоскостью алгебраической поверхности (F_n), порядка n сопряженной направлению, определяемому несобственной точкой $(\lambda, \mu, \nu, 0)$, автор называет геометрическое место «центров средних расстояний» относительно точек пересечения с (F_n) прямых указанного направления, что совпадает с понятием $(n-1)$-й полярной поверхности (полярной плоскости) для (F_n) относительно полюса $(\lambda, \mu, \nu, 0)$, (а не точки (λ, μ, ν), как ошибочно пишет автор).

Введены понятия главной точки, через которую, если она существует, проходят диаметральные плоскости любых направлений; главных диаметральных плоскостей, ортогональных сопряженным им направлениям, и понятие диаметральных самосопряженных (асимптотических) плоскостей.

Указан прием определения плоскостей симметрии (ортогональной и косой) поверхностей (F_n), в частности, поверхностей типа Ламе (Lamé)

С. Д. Россинский

939. О проекциях многообразий полного пересечения двух гиперповерхностей. Маркьонна (Sulle proiezioni delle varietà intersezioni complete di due ipersuperficie. Marchionna Ermanno), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, № 3, 265—268 (итал.)

Используя предыдущие результаты (Rend Ist. Lombardo, 1952, 85, 82—102), автор доказывает следующую теорему:

Для того чтобы гиперповерхность Γ порядка $\mu\nu$, принадлежащая гиперплоскости Π пространства S_r, была проекцией многообразия Γ* полного пересечения двух гиперповерхностей из S_r, заданных формами порядков μ и ν, необходимо и достаточно, чтобы а) двойное многообразие D ($(r-3)$-й размерности) поверхности Γ имело порядок $\delta = \mu\nu(\mu-1)\times$ $\times(\nu-1)/2$ и находилось на форме f_l (из Π) порядка $l=(\mu-1)(\nu-1)$, б) существовала субадъюнкта для Γ f_{l+1}, порядка $l+1$, пересекающая Γ (вне D) по многообразию G полного пересечения двух гиперповерхностей из Π порядков μ и ν.

Под субадъюнктой для Γ понимается форма на Π, проходящая через D. Предполагается, что Γ* не имеет кратных многообразий размерности $r-3$.

В случае $r=3$ отсюда следует теорема Альфана (Halphen, J. Ecole Polithecn., 1882, 72, 1—200): «Выпуклая кривая порядка $\mu\nu$, имеющая плоскую проекцию того же порядка с двойными точками, лежащими на кривой порядка $(\mu-1)(\nu-1)$, является полным пересечением двух поверхностей порядков μ и ν за исключением случая, когда данная кривая лежит на поверхности порядка менее μ и ν».

Г. И. Кручкович

940. Алгебраическая геометрия и арифметика. Сегре (Geometria algebrica ed aritmetica. Segre Beniamino), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 1, 88—98 (итал.)

Статья представляет текст доклада, посвященного, однако, не указанной в заглавии теме, а вопросу разрешения особенностей алгебраического многообразия. Это изменение автор объясняет появлением мемуара Дервидюе, претендующего на полное решение вопроса, но содержащего ряд ошибок.

К числу таких ошибок относится мнение Дервидюе по вопросу о поведении поляры в кратных точках многообразия (автор дает примеры, когда поляра проходит через бесконечно близкую к данной особую точку либо с нулевой, либо с гиперкратностью), заключение его о неповышении кратности особенности при элементарном преобразовании, или дилатации, по терминологии автора, которое можно вывести лишь при дополнительных условиях, налагаемых на базис дилатации и, наконец, при доказательстве предложения, названного автором фундаментальной теоремой (все особенности неприводимого алгебраического многообразия могут быть разрешены посредством подходяще выбранной конечной последовательности дилатаций) — не замеченный Дервидюе случай, когда размерность рассматриваемого многообразия $v \geqslant 3$ и оно содержит изолированное сингулярное m-кратное подмногообразие, размерность которого d удовлетворяет условию $1 \leqslant d \leqslant v-2$.

Излагая вопросы, связанные с разрешением особенностей, автор набрасывает доказательство фундаментальной теоремы для кривых и поверхностей. Впрочем, детали рассуждений в докладе отсутствуют и за ними слушатели отсылаются к подробной статье (Ann. mat. pura ed appl., 1952, (4), 33, 5—48).

Упоминаемый автором мемуар Дервидюе, по мнению референта, помещен в Math. Ann., 1951, 123, 302—330 (точных ссылок в докладе нет). Концепции большой статьи этого автора так же представляются необоснованными, как и базирующаяся на них попытка исправить свое доказательство (РЖМат, 1954, 2302]).

В. В. Морозов

941. Основная теорема об условиях рациональности бидуальных, тридуальных, n-дуальных поверхностей. Спампинато (Il teorema fondamentale sulle condizioni di razionalità di una superficie biduale, triduale, n-duale. Spampinato Nicolò), Giorn. mat. Battaglini, 1954, 82, № 1, 277—295 (итал.)

Над полем комплексных чисел рассматривается алгебра порядка n, получаемая присоединением главной единицы к нуль-алгебре $(n-1)$-го порядка (т. е. коммутативная алгебра с базисом u, v_i, $i=1, \ldots, n-1$, и таблицей умножения $u^2=u$, $uv_i=v_i$, $v_iv_j=0$). Элементы ее называются n-дуальными числами.

Рассматриваются поверхности n-дуального пространства, т. е. образы, задаваемые системой параметрических уравнений

$$\mu_j = F_j(\eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad j=1, \ldots, 4, \tag{1}$$

где F_j — формы одинаковой степени. При переходе к комплексным координатам $x_j, y_j, \ldots, z_j$; ρ_i, $\sigma_i, \ldots, \tau_i$ элементов μ_j, η_i эти уравнения принимают вид:

$$x_j = f_j(\rho_i),\ y_j = \sum_1^3 \frac{\partial f_j}{\partial \rho_i}\sigma_i + h_j^{(1)}(\rho_i), \ldots, \tag{2}$$

$$z_j = \sum_1^3 \frac{\partial f_j}{\partial \rho_i}\tau_i + h_j^{(n-1)}(\rho_i).$$

Устанавливается аналог теоремы Кастельнуово для n-дуальных поверхностей: (1) бирациональна тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий: а) она является продолжением в n-дуальную область комплексной рациональной поверхности, т. е. коэффициенты F_j — комплексные числа; б) поверхность

$$x_j = f_j(\rho_i) \tag{3}$$

бирациональна (неясная формулировка, впадающая в кажущееся противоречие с теоремой Кастельнуово, означает просто, что уравнения (3) рационально разрешимы относительно ρ_i); в) третье условие, формулируемое автором в геометрических терминах, означает, что при бирационализации поверхности (3) в $x_j = g_j(\lambda_i)$, где λ_i — рациональные функции от x_j (и ρ_j), функции $h_j^{(i)}$ в уравнениях (2) оказываются рациональными функциями от λ_i.

Выкладки производятся подробно при $n = 2$, более кратко при $n = 3$, в случае произвольного n автор ссылается на аналогию с предыдущими выкладками. *В. В. Морозов*

942. Обобщение теоремы относительно $A\varphi + B\psi$. Тибилетти (Un'estensione del teorema dell' $A\varphi + B\psi$. Tibiletti Cesarina), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 446—448 (итал.)

Сообщение о доложенной конгрессу теореме: если $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$ — пара алгебраических кривых, то кривая $f(x, y) = 0$ (где f — аналитическая функция своих аргументов при всех вещественных их значениях) может быть записана в форме $A\varphi + B\psi = 0$ (A и B — также аналитические функции) тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки пересечения M данной пары кривых выполняется формальное равенство $f = A_M\varphi + B_M\psi$, где A_M и B_M — степенные ряды по x и y; для случая, когда f, A, B — полиномы, соответствующий результат есть одна из форм известной теоремы М. Нётера (Уокер Р., Алгебраические кривые, Изд-во иностр. лит-ры, 1952, § 7.1, 140). Подробное доказательство опубликовано автором в Rend. di mat e delle sue appl., 1951, ser. 5, 10, 412—428. *Г. Е. Шилов*

943. О квадриках, принадлежащих общей форме данного порядка. Гуаццоне (Sulle quadriche che appartengono alle forme generali di dato ordine. Guazzone Stefano), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 350—353 (итал.)

Для того чтобы гиперповерхность n-го порядка r-мерного проективного пространства содержала квадрики $k-1$ измерения, необходимо и достаточно, чтобы

$$r \geqslant k + \frac{1}{k+1}\left[C_{n+k}^{k} - C_{n+k-2}^{k} - C_{k+2}^{2} + 1\right],$$

и это семейство квадрик зависит от δ параметров, где

$$\delta = [(r-k)(k+1) + C_{k+2}^{2} - 1] - [C_{n+k}^{k} - C_{n+k-2}^{k}].$$

А. П. Норден

944. О требованиях, налагаемых на простую кривую в пространстве S_r. Сальмон (Sulla postulazione di una curva semplice dello spazio S_r. Salmon Paolo), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 1, 46—50 (итал.)

Подсчитывается число условий, которым удовлетворяют алгебраические гиперповерхности m-го порядка в r-мерном проективном пространстве, проходящие через кривую n-го порядка в этом пространстве. *Б. А. Розенфельд*

945. Действительные рациональные поверхности пространства S_3, представимые на плоскости. Турри (Superficie razionali reali di S_3 rappresentabili su un piano. Turri Tullio), Rend. Seminar Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1952 (1953), 22, 3—15 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

946. Многообразия в комплексном S_{11}, определенные алгебраической поверхностью в комплексном S_3. Спампинато (Le varietà dell'S_{11} complesso determinate da una superficie algebrica dell' S_3 complesso. Spampinato Nicolò), Ricerca, Napoli, 1953, 4, № 1—2, 3—10 (итал.)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

947. О конгруенции Рибокура. Мишра, Шри Кришна (On the congruence of Ribaucour. Mishra Ratan Shanker, Krishna Shri), Ganita, 1953, 4, 39—49 (англ.)

Авторы изучают методом тензорного исчисления конгруенции Рибокура, которые получаются, если через точки поверхности S_1 (поверхность отнесения) проводить прямые параллельные нормалям в соответствующих точках поверхности S, соответствующей поверхности S_1 ортогональностью линейных элементов и называемой направляющей поверхностью конгруенции. Они дополняют полученные ранее результаты, рассматривая то, что они называют конгруенцией, взаимной к конгруенции Рибокура, т. е. конгруенцию, которая получится, если поменять ролями поверхности S и S_1.

Пара, образованная двумя взаимными конгруенциями, обладает интересными свойствами, которые авторы подробно изучают, вводя в рассмотрение характеристические функции Бианки для обеих конгруенций, ассоциированные поверхности к их направляющим (Eisenhart, A. treatise on the differential geometry of curves and surfaces, Ginn, Boston, 1909), а также соответствующие элементы площади поверхностей отнесения направляющих и ассоциированных и их сферических изображений, и, наконец, положения фокусов и фокальные расстояния на каком-нибудь из лучей рассматриваемых конгруенций. *P. Vincensini*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 157.

948. Семейства поверхностей с проективным или конформным свойством в первом приближении. Демария (I sistemi di superficie con la proprieta proiettiva o conforme in prima approssimazione. Demaria Davide Carlo), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, сер. 3, № 4, 409—413 (итал.)

Системе дифференциальных уравнений (в обозначениях Монжа)

$$r = r(x, y, z, p, q, s),\ t = t(x, y, z, p, q, s)$$

с выполненными условиями интегрируемости соответствует ∞^4 интегральных поверхностей. Каждому линейному элементу пространства отвечает связка, состоящая из ∞^2 таких поверхностей, содержащих этот линейный элемент.

Система должна иметь вид

$$r = As + B,\ t = Cs + D$$

или

$$r = (1 + p^2)\, s/pq + B,\ t = (1 + q^2)\, s/pq + D,$$

где A, B, C, D — функции x, y, z, p, q, для того, чтобы существовало проективное или соответственно конформное преобразование, которое в первом приближении переводит друг в друга всякие две связки интегральных поверхностей.

Работа обобщает соответствующие задачи для семейства кривых, решенные Терračини (Terracini A., Rev. mat. y fís. teór. Univer. Tucumàn, 1948, 6, 273 — 287; Rend. Seminar mat., Torino, 1947 — 1949, 8, 227 — 240). *А. П. Норден*

949. Зависимости между двойственными проективными инвариантами пары криволинейных элементов. Терračини (Relazioni tra invarianti proiettivi duali di coppie di elementi curvilinei. Terracini Alessandro), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, сер. 3, № 4, 368—374 (итал.)

В проективном пространстве S_{n+1} $(n \geqslant 2)$ даны две ветви кривых, имеющие общую точку, а в ней общие касательную прямую и все последующие соприкасающиеся пространства с одинаковым порядком соприкосновения.

Относительно соответствующего репера их уравнения в неоднородных точечных координатах имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,\,i+k} x^{p_i + k} \\ x_i &= \sum_{k=0}^{\infty} a'_{i,\,i+k} x^{p_i + k} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &i = 1, 2, \ldots, n,\ a_{ii} \neq 0 \\ &a'_{ii} \neq 0, \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

где $p_0 = 1 < p_1 < p_2 < \ldots < p_{n-1} < p_n = p_{n-1} + 1$, $x_0 = x$. Если проективные инварианты Б. Сегре $J_i = a_{ii}/a'_{ii}$ все равны единице, то, как показано в предыдущей работе автора (Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953, **12**, 265 — 281), величины

$$\gamma_{ij} = z_i/z_j = \frac{a_{i,\,i+m+1} - a'_{i,\,i+m+1}}{a_{ii}} : \frac{a_{j,\,j+m+1} - a'_{j,\,j+m+1}}{a_{jj}}$$

$$(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ i \neq j)$$

с отличными от нуля числителями являются проективными инвариантами.

Рассматривая ветви как огибающие их соприкасающихся гиперплоскостей $\xi_n + \sum_{i=0}^{n-1} x_i \xi_{n-i-1} + x_n = 0$, получим для них уравнения в неоднородных тангенциальных координатах ξ_i $(\xi_0 = \xi)$, двойственные (1), и инварианты $\gamma^*_{ij} = z^*_i/z^*_j$, двойственные γ_{ij}. Доказывается, что между величинами z_i и z^*_i существует линейная однородная зависимость $\rho z^*_i = \sum_{r=1}^{n} h_{ir} z_r$, коэффициенты которой h_{ir} суть постоянные числа, для которых находятся их выражения через m, n и p_i. В случаях обыкновенных ветвей $(m = 0,\ p_i = i + 1)$ зависимость между z^*_i и z_i, а в случае $n = 2$ и зависимость между γ^*_{12} и γ_{12} принимают более простой вид и становятся инволюторными. *Р. Н. Щербаков*

950. О поверхностях, асимптотические линии которых образуют сеть квазилиний возврата. Штрубекер (Über die Flächen, deren Asymptoten-linien ein Quasi-Rückungsnetz bilden. Strubecker Karl), Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1953, **1952**, 103—110 (нем.)

Зауэр (Sauer, Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1950, **1949**, 1 — 12) определяет эти поверхности в параметрах асимптотических линий координатами

$$(U_1(u) + V_1(v),\ U_2(u) + V_2(v),\ z(u, v)).$$

Автор делает различные замечания: 1) Эти поверхности уже рассматривались ранее. В сноске дается литература. 2) Они допускают параметрическое представление, свободное от знака интеграла (Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, vol. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1894, 273—274). 3) Их можно исследовать с помощью построенной автором дифференциальной геометрии изотропного пространства, т. е. трехмерного пространства с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$ (Math. Z., 1942, **47**, 743—777). В этой геометрии они тождественны поверхностям постоянной релятивной кривизны $K = z_{xx} z_{yy} - z^2_{xy} \neq 0$. Если $K < 0$, то асимптотические линии действительны. Если $K > 0$, то представление 2) содержит только одну аналитическую функцию. 4) Рассмотрено много специальных случаев. *P. Scherk*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 158.

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

951. Разбиение пространства квадратичных соотношений грассманиана. Бурау (Lo spezzamento dello spazio delle relazioni quadratiche d'una grassmanniana. Burau Werner), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 269—270 (итал.)

Известно, что грассманиан $G_{n;\,k}$ подпространств X_k пространства X_n может быть представлен посредством ряда линейно независимых квадратичных соотношений между плюккеровыми координатами X_k, число которых обозначим $r(n, k)$. Пусть далее $S_{r(n,k)-1}$ — линейное пространство, которым представляется совокупность квадратичных соотношений грассманиана. Тогда S_{r-1} разлагается в $[(k+1)/2]$ неприводимых частей относительно группы проективных преобразований X_n, каждая из которых индивидуализирована многообразием Шуберта типа $F^{n;\,k_1,\,k_2}$.

Если $\langle F^{n;\,k_1,\,k_2}\rangle$ — пространство, охватывающее $F^{n;\,k_1,\,k_2}$, то такими частями будут

$$\langle F^{n;\,n-k+1,\,n-k-3}\rangle,\quad \langle F^{n;\,n-k+3,\,n-k-5}\rangle, \ldots.$$

$$\ldots \begin{cases} \langle F^{n;\, n-2,\, n-2k}\rangle, & \langle F^{n;\, n,\, n-2k-2}\rangle \\ \langle F^{n;\, n-3,\, n-2k+1}\rangle, & \langle F^{n;\, n-1,\, n-2k-1}\rangle \end{cases}$$

(в зависимости от того, является ли k нечетным или четным). *Н. И. Кованцов*

952. Об экстензорах в пространстве нецелого порядка. С а с а я м а (On extensors in the space of nonintegral order. S a s a y a m a H i r o y o s h i), Tensor, 1953, **3**, 53—64 (англ.)

В этой статье понятие экстензора распространяется на пространства нецелого порядка с помощью дробного дифференцирования. Сначала с помощью правила Лейбница типа для дробного дифференцирования произведения изучаются различные свойства обобщенного преобразования координат дробного порядка. Все встречающиеся бесконечные ряды предполагаются сходящимися. Далее определяются некоторые свойства дробных производных взвешенных якобианов преобразований координат. Затем автор вводит эксковариантные и эксконтравариантные векторы дробной степени, используя формулы преобразования, включающие преобразования координат дробного порядка, а также якобиевы экстензоры с помощью аналогичной схемы. Остальная часть статьи посвящена определению экстензоров и инвариантов, связанных с данным экскектором.

N. Coburn

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 255.

953. Аффинная связность и риманова геометрия. Б о м п ь я н и (Connessioni affini e geometria riemanniana. B o m p i a n i E n r i c o), Boll. Unione. mat. ital., 1953, сер. 3, **8**, № 4, 363—368 (итал.)

Любой точке x^0 пространства аффинной связности X_n без кручения можно сопоставить риманово пространство, основной тензор g_{ij} которого принимает в x^0 любое начальное значение, а в окрестности второго порядка точки x^0 совпадают связности пространств и кривизны двумерных площадок, содержащих x^0.

Если X_n обладает кручением, то основной тензор g_{ij} можно определить в окрестности первого порядка точки x^0 так, что его ковариантная производная будет равна нулю.

В связи с предыдущим результатом рассматриваются некоторые соответствия направлений, определенные тензором кручения пространства X_n.

А. П. Норден

954. Применение теории групп к изучению свойств симметрии тензоров. Б а с а л и (Applications of group theory to the study of the symmetry properties of tensors. B a s s a l y W. A.), Proc. Math. and Phys. Soc. Egypt, 1952, **4**, № 4, 105—116 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Хорошо известно, что тензор второго ранга $F_{i_1 i_2}$ $(i_1, i_2 = 1, \ldots, n)$ может быть вполне приведен к своим вполне симметрической и вполне антисимметрической частям согласно равенству

$$F_{i_1 i_2} = \frac{1}{2}(F_{i_1 i_2} + F_{i_2 i_1}) + \frac{1}{2}(F_{i_1 i_2} - F_{i_2 i_1}).$$

Проблема, подлежащая решению, состоит в том, чтобы получить для тензоров высших рангов подобные приведения, имеющие максимальные свойства симметрии. В данной работе используется некоторый метод для приведения тензоров третьего и четвертого ранга, которые представляют интерес для физиков. Показано, что свойства симметрии тензора Римана—Кристоффеля, играющего важную роль в теории относительности Эйнштейна, максимальны. *Резюме автора*

955. Об одном представлении единого поля. Э л и (Sur une représentation du champ unitaire. H é l y J e a n), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 13, 1375—1377 (франц.)

Строится единая теория поля, в которой поле задается метрическим тензором g_{ik} и четырехмерным вектором — потенциалом φ^i электромагнитного поля, причем геометрия единого поля является геометрией аффинной связности с кручением, коэффициенты которой имеют вид $\Gamma^i_{kl} = \overset{0}{\Gamma}{}^i_{kl} + G^i_{kl}$, где $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{kl}$ — коэффициенты римановой связности, определяемой тензором g_{ik}, а G^i_{kl} — тензор, для которого тензор $G_{ikl} = g_{ih}G^h_{kl}$ — вполне кососимметричный тензор, определяющий внешнюю кубическую форму, для которой присоединенным вектором является вектор φ^i. Получаются некоторые результаты, близкие к результатам теории де Бройля — Прока. *Б. А. Розенфельд*

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

956. Заполнение и покрытие выпуклой сферической области кругами. I. М о л н а р (Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen sphärischen Gebietes durch Kreise, I. M o l n á r J.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 266—275 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Рассматриваются утверждения Фейеша Тота о том, что при заполнении выпуклой области на сфере равными неналегающими кругами плотность заполнения $d < \pi/\sqrt{12}$, а при покрытии по меньшей мере тремя равными кругами плотность покрытия $D > 2\pi/\sqrt{27}$ (речь идет об отношении суммарной площади кругов к площади области). Соответствующие результаты известны для плоскости, выпуклой плоской области и всей сферы.

В настоящей первой части работы устанавливается оценка $d < \pi/\sqrt{12}$ для сферической области G, выпуклой или такой, что ее дополнение до всей сферы выпукло. При этом G разбивается на прилегающие к отдельным кругам части, в каждой из которых порознь плотность заполнения оказывается $< \pi/\sqrt{12}$. Для частей специального вида эта оценка уточняется. *В. А. Залгаллер*

957. О проективно-дифференциальной геометрии точечных преобразований конечных областей. В и л л а (Per una geometria proiettiva differenziale in grande delle trasformazioni puntuali. V i l l a M a r i o), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **1**, 263—273 (итал.)

Обзор исследований по геометрии дифференцируемых точечных отображений проективного пространства P_n, начало которым было положено Чехом и его школой.

В случае P_2 направления называются характеристическими, если прямые этих направлений переходят при отображении в такие линии, которые имеют в соответствующей точке «перегиб k-го порядка» ($k > 0$), т. е. находятся со своей касательной в соприкосновении порядка $k+1$.

Из данной точки могут исходить 3, 2, 1 или ∞^1 характеристических направлений и в зависимости от этого отображение считается принадлежащим первому, второму, третьему или четвертому виду соответственно. Для некоторых из этих типов и частных случаев других приводятся конечные уравнения отображения.

Отмечаются некоторые свойства соприкасающихся гомографий, связь с теорией плоских сетей и их проективных изгибаний, а также с геометрией поверхностей многомерных проективных пространств.

Обзор сопровождается ссылками на работы Чеха, Барувки, Вилла, Бляшке, Фубини, Мураккини, Бомпиани, Бузано, Роллеро, Ваона. *А. П. Норден*

958. О точечных преобразованиях 2-го и 3-го вида для плоскости. В а о н а (Sulle trasformazioni puntual idi 2^a e 3^a specie fra piani. V a o n a G u i d o), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 449—455 (итал.)

При рассмотрении дифференцируемых точечных отображений двух проективных плоскостей друг на друга вводятся понятия порядка точки перегиба, характеристических направлений и вида отображений (см. рсф. 957)

Характеристической называется кривая, касающаяся в каждой своей точке характеристического направления отображения. Прямая, исходящая из точки первой плоскости, называется прямой перегиба порядка s, если соответствующая ей кривая второй плоскости имеет точку перегиба порядка s.

Приводится ряд теорем, которые могут быть резюмированы следующим образом: при отображении вида k, характеристическая прямая (любая при $k=1$ или двойная при $k=2,3$) есть вообще говоря прямая перегиба порядка k, который может повыситься только в том случае, если соответствующая характеристическая линия прямая. *А. П. Норден*

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

959. Об общих точках геодезических. С т р е л ь ц о в **В. В.**, Изв. АН КазахССР, 1953, № 3, 89—103 (резюме казах.)

Пусть F — ограниченная геодезической ломаной гомеоморфная замкнутому кругу выпуклая поверхность с непрерывной гауссовой кривизной и интегральной кривизной $\omega^+ < 2\pi$. Доказывается, что всякая геодезическая на F при своем продолжении имеет с любой не идущей вдоль нее кратчайшей не более конечного числа общих точек. Это используется, чтобы установить, что ни одна геодезическая на F не может быть продолжена на бесконечную длину. Последнее утверждение (из которого в свою очередь следует первое) содержится в полученных иным путем более общих результатах А. Д. Александрова (Докл. АН СССР, 1948, 63, № 4, 349—352), доказательство которого, впрочем, еще не опубликовано.

Отмечаются такие следствия, как конечность числа кратных точек у геодезической и числа пересечений нескольких, попарно не налегающих геодезических на F. Выводы распространяются на выпуклые поверхности с нарушениями непрерывности кривизны в конечном числе конических точек, вокруг которых полный угол на поверхности $< 2\pi$, как около вершин выпуклого многогранника. *В. А. Залгаллер*

960. Варианты конических проекций. Г и н з б у р г **Г. А.**, Тр. Моск. ин-та инж. геод., аэрофотосъемки и картогр., 1953, № 16, 17—24

Разбирается особый способ получения прямых произвольных конических проекций, в котором принимается масштаб по меридиану $m = m_0 + \overline{K}(\varphi - \varphi_0)^2$, где φ — широта, φ_0 — средняя широта картируемого широтного пояса. В статье достаточно подробно рассматривается получение практических формул предлагаемых вариантов упомянутого типа проекций. Статья имеет практическое значение, ее теоретическое обоснование очень простое. *М. Д. Соловьев*

961. Аддитивные функционалы k-мерных выпуклых тел. Х а д в и г е р **Н.** (Additive Funktionale k-dimensionaler Eikörper. II. H a d w i g e r H. von), Arch. Math., 1953, 4, № 5/6, 374—379 (нем.)

Функционал $\varphi(A)$, определенный на множестве замкнутых выпуклых тел A в k-мерном евклидовом пространстве, называется аддитивным, если при всяком разбиении выпуклого тела $A+B$ $(k-1)$-мерной плоскостью на тела A и B справедливо соотношение $\varphi(A)+\varphi(B) = \varphi(A+B) + \varphi(AB)$.

Доказывается, что всякий функционал $\varphi(A)$, 1) инвариантный относительно движения, 2) аддитивный, 3) монотонный (т. е. такой, что $\varphi(A) \geqslant \varphi(B)$ при $A \supset B$), представляет собой линейную комбинацию $\varphi(A) = \sum_{i=0}^{k} c_i W_i(A)$ смешанных объемов Минковского $W_i(A)$ с неотрицательными коэффициентами c_i.

В первой части этой работы (Arch. Math., 1952, 3, № 6, 470—478) устанавливалось, что в тех же условиях при замене требования монотонности функционала $\varphi(A)$ его непрерывностью $\varphi(A)$ представляет собой линейную комбинацию смешанных объемов Минковского с коэффициентами произвольных знаков. *И. Я. Бакельман*

962. Экстремальная задача о выпуклых телах вращения. Б и р и (Ein Minimum-Maximumproblem über konvexe Rotationskörper. B i e r i H. von), Comment. math. helv., 1954, 28, № 2, 149—154 (нем.)

Каждому выпуклому телу K в трехмерном евклидовом пространстве сопоставляется число $M(K)$; если граница Γ тела K достаточно гладка, то $M(K)$ — интеграл по Γ от средней кривизны Γ; для других выпуклых тел $M(K)$ можно определить

предельным переходом. Доказывается, что в классе выпуклых тел вращения с заданной длиной оси l и длиной меридиана L минимум $M(K)$ достигается для цилиндра и только для него, максимум же—для тела, составленного из двух равных конусов, и только для него. *А. Й. Фет*

См. также: 550, 558 К, 559 К, 647, 795, 860.

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

963. **Решение основного вопроса автоскрепления по методу академика С. А. Чаплыгина.** Потапов В. С., Уч. зап. Сталингр. пед. ин-та, 1953, № 3, 9—16

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{b_1 z}{t}\left[1 - \frac{1}{b}\cdot\frac{D}{z} + \sqrt{\left(\frac{D}{z}+b_2\right)\left(\frac{D}{z}-b_3\right)}\right], \quad (1)$$

к интегрированию которого при условиях $z(1/m)=0$ и $z(1/am)=1$ сводится решение основного вопроса автоскрепления (здесь m — параметр, удовлетворяющий условию $0<m<1$).

Автор указывает, что методы численного интегрирования этого уравнения, использованные при исследовании задачи автоскрепления И. Ф. Дроздовым и Г. В. Оппоковым, громоздки и не дают ясного представления об уклонении приближенного решения от истинного.

Показывается, что приближенное интегрирование уравнения (1) методом С. А. Чаплыгина свободно от указанных недостатков.

Начальная пара приближений находится из уравнений

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{b_1 z}{t} - \frac{b_1}{t}\sqrt{(D+b_2 z)(D-b_3 z)}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{b_1 D}{bt} + \frac{b_1}{t}\sqrt{(D+b_2 z)(D-b_3 z)}, \quad (2)$$

интегрируемых в квадратурах.

Уравнения (2) решаются сначала при условии $z(1/m)=0$, а затем при условии $z(1/am)=1$.

Следует отметить, что чертеж 2 и заключение о расположении начальной пары приближений не соответствуют рассматриваемым условиям $z(1/m)=0$ и $z(1/am)=1$. *Б. Н. Бабкин*

964. **О точности численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.** Стерн (The accuracy of numerical solutions of ordinary differential equations. Sterne Theodore E.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, 7, № 43, 159—164 (англ.)

Дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j + b_i(t) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

При решении ее разностным методом, если на m-м шагу вносятся погрешности $\varepsilon_i(t_m)$ в решения $x_i(t)$, накопившаяся погрешность решения $x_k(t)$ в некоторой точке x_p приближенно выражается формулой

$$\sum_{m<p}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(t_m)\,\lambda_j(t_m),$$

где $\lambda_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — решение сопряженной системы $\dot{\lambda}_i = -\Sigma_{j=1}^{n} a_{ji}\lambda_j$ при начальных условиях $\lambda_k(t_p)=1$, $\lambda_i(t_p)=0$ $(i\neq k)$.

В случае нелинейной системы рассматривается соответствующее сопряженное уравнение в вариациях. Автор не дает строгого доказательства своего утверждения, которое, как вытекает из результатов, полученных референтом (Докл. АН СССР, 1953, 93, № 4, 599—602), справедливо лишь для разностных методов типа Адамса, для метода же Симпсона, например, заведомо несправедливо. В работе приведен пример, иллюстрирующий применение метода для определения величины шага и количества запасных цифр для получения результата с заданной точностью. *М. Л. Бродский*

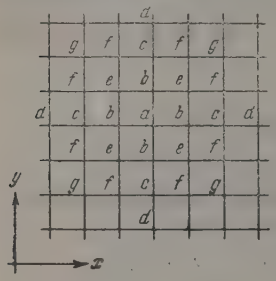
965. **К численному определению периодических решений при нелинейных колебаниях.** Коллац (Détermination numérique de solutions périodiques dans le cas d'oscillations non linéaires. Zur numerischen Bestimmung periodischer Lösungen bei nichtlinearen Schwingungen. Collatz L.), Actes du Colloq. Internat. Vibrations non linéaires, 1951, pp. 195—205; дискуссия, p. 206, Publ. Sci. Tech. Ministère de l'Air, Paris, № 281, 1953 (франц., нем.)

Автор предлагает некоторые методы для нахождения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими граничными условиями. Один из этих методов использует релаксацию для определения неизвестных коэффициентов конечной тригонометрической суммы, которая предполагается удовлетворяющей уравнению. Если период неизвестен, он также является одной из величин, подлежащих определению. Другой метод использует конечные разности и применим в случае, когда дифференциальное уравнение может быть представлено в форме $L(x)=N(x^{(m)}, t)$, где L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и N — нелинейная функция некоторой определенной производной от x, содержащая независимую переменную t. Методы иллюстрированы примерами. *W. E. Milne*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 165.

966. **Формула Тейлора и конечные выражения для Δu и $\Delta\Delta u$.** Альбрехт (Taylor-Entwicklungen und finite Ausdrücke für Δu und $\Delta\Delta u$. Albrecht J. von), Z. angew. Math. und Mech. 1953, 33, № 1—2, 41—48 (нем.; резюме англ. франц., русс.)

Получены соотношения между значениями функции u, значениями Δu и $\Delta\Delta u$ в узлах сетки, позволяющие заменять дифференциальные уравнения $\Delta u = f$, $\Delta\Delta u = f$ и некоторые другие с различной степенью точности разностными уравнениями.



К реф. 966.

Пусть пространство двумерное и сетка точек квадратная. Обозначения точек указаны на чертеже. Строится равенство вида

$$\{au_a + b\Sigma u_b + c\Sigma u_c + d\Sigma u_d + \ldots\} + \frac{h^2}{2!}\{A\Delta u_a + B\Sigma\Delta u_b + C\Sigma\Delta u_c + D\Sigma\Delta u_d + \ldots\} + \cdots + R = 0, \quad (1)$$

которое должно выполняться для всякой достаточно большое число раз дифференцируемой функции u. Коэффициенты $a, b, \ldots, A, B, \ldots$ выбираются так, чтобы дополнительный член R имел бы возможно высокий порядок малости, т. е. чтобы после замены $\Sigma u_b, \ldots, \Sigma\Delta u_b, \ldots$ тейлоровскими разложениями около точки a в R вошли бы члены с производными возможно высокого порядка. Коэффициенты соотношения (1) подсчитаны в 10 случаях. Первые три равенства, например, имеют вид

$$\Sigma u_b - 4u_a - h^2\Delta u_a + R = 0,$$

$$\Sigma u_c + 4\Sigma u_b - 20u_a - 0{,}5h^2[\Sigma\Delta u_b + 8\Delta u_a] + R = 0,$$

$$\Sigma u_e + 4\Sigma u_b - 20u_a - \frac{1}{12}h^2[\Sigma\Delta u_e + 4\Sigma u_b + 52\Delta u_a] + R = 0.$$

Дополнительные члены их имеют порядок соответственно 4, 6, 6.

Такие же вычисления сделаны для треугольной сетки (получено 8 соотношений), для шестиугольной сетки (4 соотношения) и для кубической сетки в трехмерном пространстве (8 соотношений).

Сходные соотношения вполне аналогичным путем были получены значительно раньше (см., например, Микеладзе Ш. Е., Изв. АН СССР, сер. матем., 1938, № 2, 271—292). *В. И. Крылов*

967. Решение дифференциальных уравнений в частных производных при помощи метода конечных разностей на электронном дифференциальном анализаторе. Хау, Хейнман (The solution of partial differential equations by difference methods using the electronic differential analyzer. Howe R. M., Haneman V. S.), Proc. Western Computer Conf. (Febr. 1953), New York, 1953, 208—226 (англ.)

Описывается решение дифференциальных уравнений

$$C\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t);$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2};$$

$$p\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}KI\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] = 0$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями на электронном дифференциальном анализаторе. Широко известная методика решения методом прямых подробно описана в работе. Приводятся точные решения для некоторых дифференциально-разностных уравнений и сравниваются с соответствующими решениями на электронном дифференциальном анализаторе. Дается принципиальная схема электронного анализатора на 80 усилителей, из которых 40 могут быть использованы как интеграторы и сумматоры, а остальные 40 — только как сумматоры. На таком анализаторе возможно решать уравнения теплопроводности, волновые уравнения и уравнения изгиба балки с одной пространственной координатой на 20 узлов.

В. К. Саульев

968. Некоторые методы вычисления приближенных временных характеристик линейных систем автоматического регулирования. Красовский А. А., Поспелов Г. С., Автоматика и телемеханика, 1953, **14**, № 6, 675—689

Излагаются способы приближенного вычисления оригинала (временной характеристики) по его изображению (передаточной функции). Идея этих способов основана на замене дифференциального уравнения разностным и использовании последнего в качестве рекуррентной формулы. Описанные способы эквивалентны способам численного решения линейных интегральных уравнений Вольтерра.

Приведены два примера вычисления решения интегрального уравнения Вольтерра при заданном ядре и свободном члене, что соответствует вычислению временной характеристики замкнутой системы автоматического регулирования по заданной импульсной временной характеристике разомкнутой системы и внешнему воздействию. *Я. З. Цыпкин*

969. О нулях многочленов. Реньи, Туран (On the zeros of polynomials. Rényi A., Turán P.), Acta math. Acad. sci. hung., 1952, **3**, № 4, 275—284 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.; резюме русс.)

Авторы продолжают исследование пределов применимости приближенного вычисления нулей многочленов по методу Лобачевского, начатое в работах Сан-Хуана (San Juan R., Bull. sci. math., 1935, 59, 104—109), Островского (Ostrowski A., Acta math., 1940, **72**, 99—257) и Турана (Turán P., On approximative solution of algebraic equations, Publ. Math. Debrecen, 1951, **2**, 26—42).

Пусть $f_0(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k0}x^k$ — исходное уравнение,

$$f_\nu(x) = (-1)^n f_{\nu-1}(\sqrt{x})\, f_{\nu-1}(-\sqrt{x}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

$$f_\nu(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k\nu}x^k \quad (a_{n\nu} = 1).$$

Определим числа s_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ из систем линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{k-1} s_{k-j}\, a_{n-j,\nu} + k a_{n-k,\nu} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и

$$\sum_{j=0}^{n} s_{k-j}\, a_{n-j,\nu} = 0 \quad (k = n+1, \ldots, N)$$

Тогда, если z_1 обозначает наибольший по модулю корень уравнения $f_0(x)=0$, то

$$(1/n)^{2-\nu} \leqslant |z_1| \left(\max_{j=1,\ldots,N} |s_j|^{1/j}\right)^{-2-\nu} \leqslant (1/1-\varepsilon)^{2-\nu},$$

где $0<\varepsilon<1$ и $N=\left[\frac{n}{\varepsilon}\ln\frac{2n}{\varepsilon}\right]+2$.

Центральная идея, на которой базируется вывод, заключается в оценке по модулю снизу сумм вида

$$f(t)=\sum_{j=1}^{n} b_j w_j^t$$

($b_j>0$, $1=|w_1|\geqslant|w_2|\geqslant\ldots\geqslant|w_n|$; t — целое).

В качестве примера может служить теорема I:

$$\max_{1\leqslant t\leqslant M_1} |f(t)| \geqslant b_1(1-\varepsilon),$$

где ε и M_1 выбраны согласно условиям

$$0<\varepsilon<\min\left\{1, \frac{2(b_2+b_3+\ldots+b_n)}{b_1}\right\},$$

$$M_1=\left[\frac{f(0)}{b_1\varepsilon}\ln\frac{2f(0)}{b_1\varepsilon}\right]+2.$$

В теореме II дается интегральный аналог теоремы I.

Более детализированное изложение этой теории должно быть дано в подготовляемой Тураном книге «Über eine neue Methode der Analysis und ihre Anwendungen». *В. Л. Гончаров*

970. Применение гиперболических функций к вычислению квадратного корня из целого числа. Р а н ц (Application des fonctions hyperboliques au calcul de la racine carrée d'un nombre entier. R a n t z J.), Rev. math. spéc., 1954, **64**, № 8, 181—183 (франц.)

Для извлечения квадратного корня из натурального числа N берем два натуральных числа $a(1)$ и $b(1)$, удовлетворяющих условиям $[a(1)]^2-N[b(1)]^2=1$, $a(1)>1$, $b(1)>0$. По рекуррентным формулам $a(p)=a(1)\cdot a(p-1)+N\cdot b(1)\times b(p-1)$, $b(p)=b(1)\cdot a(p-1)+a(1)\cdot b(p-1)$ образуем $a(p)$ и $b(p)$. Имеет место

$$\frac{a(p)}{b(p)}\left[1-\frac{1}{2[a(p)]^2-1}\right]<\sqrt{N}<\frac{a(p)}{b(p)}\left[1-\frac{1}{2[a(p)]^2-\frac{1}{2}}\right].$$

Автор применяет полученные формулы для вычисления $\sqrt{3}$ с помощью арифмометра и получает ответ с точностью до 10^{-46}. Нетрудно видеть, что $a(1)$, $b(1)$, также и $a(p)$, и $b(p)$ — решения уравнения Пелля $t^2-Du^2=1$, хотя автор и не указывает на это. Следовательно, тот же результат можно получить из теории непрерывных дробей, не прибегая, как в работе, гиперболических функций для вывода нужных соотношений. *В. А. Голубев*

971. Приближенное решение уравнений. Б а у р (Die näherungsweise Lösung von Gleichungen. B a u r A r n o l d), Math.-phys. Semesterber., 1953, **3**, № 3—4, 235—237 (нем.)

Для решения уравнения $y\equiv f(x)=0$ предлагаются методы, представляющие обобщение методов хорд и касательных: строится интерполяционный полином для обратной функции по значениям функции $x=x(y)$ и ее производных в двух точках, причем производные $x^{(m)}(y)$ выражаются через соответствующие производные функции $y(x)$. Оценки погрешностей выражаются через производные функции $x(y)$ в промежуточной точке по обычным формулам оценки погрешностей интерполяционных формул с кратными узлами. *М. Л. Бродский*

972. Об интерференционном методе определения радиуса кривизны сферической или параболической поверхностей с помощью сферической поверхности, радиус которой известен и приближенно равен определяемому радиусу кривизны. П и х т (Zur interferometrischen Bestimmung des Krümmungsradius sphärischer und parabolischer Flächen mit Benutzung einer sphärischen Normalfläche von bekanntem, näherungsweise gleichem Krümmungsradius. P i c h t J.), Optik, 1953, **10**, № 12, 587—602 (нем.)

Интерференционная картина, наблюдающаяся при наложении двух оптических поверхностей, радиусы кривизны которых немного отличаются друг от друга, используется для определения кривизны одной из поверхностей, когда радиус другой известен.

Автор дает вывод формул, необходимых для применения метода, когда поверхность, кривизна которой задана,— сфера, а исследуемая поверхность — или сфера, или параболоид вращения. В случае, когда обе касающиеся поверхности — сферы, в предположении, что вторую (по направлению луча) поверхность лучи встречают по нормали (с достаточной точностью), задача сводится к определению одного из r_1, r_2, когда другой известен, с помощью уравнений

$$r_1\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^2}\right)+r_2\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^2}\right)=\frac{p}{2}\lambda\sqrt{1-\left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^2}, \quad (1)$$

$$\rho_2=\rho_1\frac{2r_2}{2r_2+p\lambda}, \quad (2)$$

где ρ_1 и ρ_2 — расстояния точек пересечения луча с прикасающимися поверхностями от оси симметрии, p — число интерференционных колец, λ — длина волны.

Раскладывая корни уравнения (1) в ряды и удерживая по три члена в каждом ряде, для величины $x=\rho_1/(2r_2+p\lambda)$ (или $y=\rho_1/2r_1$), автор получает уравнение третьей степени (в одном случае параболоида получается уравнение четвертой степени). Получающиеся алгебраические уравнения решаются приближенно с использованием того факта, что радиусы кривизны, данной и определяемой, близки по величине. *П. П. Касьянков*

973. Графическое решение уравнений. Д'Э в а н (Risoluzione grafica di equazioni. D ' E v a n t A l e s s a n d r o), Riv. mecc., 1953, **4**, № 73, 15—19 (итал.)

Приводятся в популярном изложении простейшие приемы графического решения алгебраических уравнений. *М. К. Керимов*

974. Графическое решение уравнений. Д'Эван (Risoluzione grafica di equazioni. D'Evant Alessandro), Riv. mecc., 1953, 4, № 76, 7—13 (итал.)

Развивая свою предыдущую работу (см. реф. 973), автор предлагает приемы графического решения алгебраических уравнений четвертого и любого порядков, а также систем двух линейных алгебраических уравнений. *М. К. Керимов*

975. Графический метод решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Радельт (Eine graphische Methode zur Lösung eines Systems von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten. Radelt Heinz), Nachrichtentechnik, 1954, 4, № 1, 41—42 (нем.)

Описывается графический прием Дегена (Degen A., Bull. Schweiz. ETV, 1952, 43, 765), основанный на том, что каждое из уравнений системы интерпретируется как плоскость. Координаты точки пересечения трех плоскостей представляют искомые корни уравнений. Ход решения таков: в данной системе $a_iI_1 + b_iI_2 + c_iI_3 + d_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ полагают одну из неизвестных равной произвольному числу, например $I_3 = M_1 = \text{const}$, и проводят в системе координат I_1OI_2 три прямых $I_1 = -(b_iI_2 + K_1) / a_i$ $(K_1 = c_iM_1 + d_i = \text{const})$, образующих треугольник ABC. Затем той же неизвестной придается другое произвольное значение, например $I_3 = M_2 = \text{const}$ и, аналогично предыдущему, строится второй треугольник $A'B'C'$. Прямые AA', BB', CC' пересекаются в точке S, координаты которой соответствуют значениям I_1 и I_2. Затем находится I_3 по обычным правилам начертательной геометрии. Приведен пример.

А. Б. Штыкан

976. Заметка об области применимости гипотезы параболы в механическом расчете воздушных линий электропередачи. Руссо (Note sur le domaine d'applicabilité de l'hypothèse parabolique dans le calcul mécanique des lignes aériennes. Rousseau M.), Bull. scient. Assoc. ingrs Montefiore, 1953, 66, № 10, 767—773 (франц.)

Заметка начинается со ссылки на номограмму Блонделя для расчета проводов воздушных линий электропередачи, состоящую из семейства вертикалей, помеченных значениями величины am, семейства прямых (непараллельных и нерадиантных), помеченных значениями напряжения, и семейства гипербол, помеченных значениями fm. Здесь a, f — пролет и провес в метрах, m — коэффициент нагрузки.

Номограмма построена в предположении параболической формы кривой провисания провода. Максимальное напряжение в пролете приближенно принимается равным напряжению в точке минимума кривой провисания. Показывается, что ошибка, происходящая от последнего предположения, в 6 раз превышает ошибку, происходящую от первого. Приняв относительную ошибку второго в 5%, автор устанавливает, что относительная ошибка второго предположения будет меньше 5%, если $am < 800$.

В заключение указывается, что в случае различных высот точек подвеса, когда угол наклона прямой, соединяющей точки подвеса, мал, можно пользоваться номограммой Блонделя, принимая в качестве a горизонтальную проекцию пролета. Допустимая граница этого угла не указывается.

И. Н. Денисюк

977 К. Математический практикум на счетно-вычислительных приборах и инструментах. Под общ. ред. Леднева Н. А., 366 стр., Изд-во «Советская наука», М., 1954, 7 р. 20 к.

Книга является учебным пособием по математическому практикуму на вычислительных приборах и инструментах, предназначенным для втузов обычного типа.

Первая и вторая главы книги являются вспомогательными. Именно, в первой главе излагаются сведения о простейших счетных машинах (логарифмическая линейка, русские счеты, арифмометр «Феликс», полуавтоматическая счетная машина «Архимед», автоматическая счетная машина «Евклид»).

Вторая глава содержит простейшие понятия теории погрешностей приближенных чисел. Глава 3 — «Составление таблиц функций и пользование ими» — содержит принципы составления таблиц. Здесь приведены краткие сведения о конечных разностях, о проверке таблиц, об интерполяции таблиц (прямая и обратная интерполяция, различные интерполяционные формулы, погрешность при интерполяции). Далее разобраны вопросы субтабулирования. Глава заканчивается параграфом о табличном дифференцировании.

Глава 4 посвящена приближенному решению алгебраических и трансцендентных уравнений. Здесь подробно изложен метод итерации сначала для системы из двух алгебраических уравнений, а затем для системы n уравнений. Далее излагаются методы графического решения и Ньютона — Рафсона для одного уравнения.

Приближенному интегрированию в случае обычного интеграла посвящена глава 5. Приводятся формулы трапеций, Симпсона, изложен метод графического интегрирования, дано описание и принцип работы планиметра. Глава заканчивается изложением метода Чебышева для численного интегрирования.

В главе 6 — «Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений» — подробно изложены два метода численного интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка: метод Эйлера и разностный метод (метод Адамса—Крылова).

В главе 7, посвященной гармоническому анализу, после кратких теоретических сведений излагаются векторный метод практического гармонического анализа и метод шаблонов для случая двенадцати ординат.

Последняя глава содержит обстоятельное изложение основ номографии. Эта глава по содержанию и объему может служить справочным пособием для инженеров по номографии. Здесь изложены методы построения всех основных типов номограмм (сетчатые номограммы, номограммы из выравненных точек, номограммы с бинарными полями и т. д.), определение погрешности при вычислении по номограммам, даны правила конструирования, расчета и вычерчивания номограмм. Далее излагаются методы построения номограмм для уравнений, приводящихся к канонической форме Коши, для уравнений, приводящихся ко второй канонической форме $f_3(w) = f_1(u) + f_2(v)$, методы построения

составных номограмм, номограмм уравнений третьего номографического порядка на «скелетах».

Все главы книги заканчиваются списком рекомендуемых задач, а параграфы, имеющие самостоятельное значение, снабжены подробно разобранными лабораторными занятиями с указанием методов расчета и рациональных схем для производства вычислений. *М. К. Керимов*

978 Д. **Наиболее точные квадратурные формулы для некоторых классов функций. Шайдаева Т. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1954

ТАБЛИЦЫ

979 К. **Таблицы значений функции** $w(z) = e^{-z^2}\left(1+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{t^2}dt\right)$ **от комплексного аргумента.** **Фаддеева В. Н., Терентьев Н. М.**, 268 стр., Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, М., 1954, 19 р. 70 к.

Таблицам предшествует введение, содержащее сведения об основных свойствах функции

$$w(z) = e^{-z^2}\left(1+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{t^2}dt\right),$$

а также об основных этапах вычисления таблиц.

В таблицах помещены численные значения действительной и мнимой частей функции $w(z)$ с шестью знаками, причем внутри квадрата $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 3$ табулирование производится через 0,02, а в области $3 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant y < 3$; $0 \leqslant x \leqslant 5$, $3 \leqslant y \leqslant 5$ — через 0,1 по каждой из переменных. Кроме значений функции, даются также коэффициенты рекомендуемых в книге интерполяционных формул. Во введении описывается также эффективный метод вычисления значений функции $w(z)$ вне табличной области.

Все вычисления производились на клавишных и счетно-аналитических машинах. *С. С. Токмалаева*

980 К. **Данные для рентгеновского анализа. Т. I. Графики для решения уравнения Брэгга (d в зависимости от θ и 2θ). Парриш, Эруин** (Data for X-ray analysis. Vol. I. Charts for solution of Bragg's equation (d versus θ and 2θ). Parrish W., Irwin B. W., 99 pp., Philips' Technical Library, Eindhoven, 1953, 2 doll.) (англ.)

Графики соотношения $d = \lambda / 2\sin\theta$ построены как для θ, так и для 2θ. Значения θ можно прочесть с точностью до 0,01°, а значения d — с точностью до 0,001°. Значения λ, использованные при построении графиков, были выбраны по соображениям их физической ценности (ср. Tables for conversion of X-ray diffraction angles..., National Bureau of Standards Applied Mathematics Series № 10, Washington, D. C., 1950).

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 11, 1125.

981 К. **Данные для рентгеновского анализа. Т. II. Таблицы для вычисления постоянной решетки кубических кристаллов. Парриш, Экстейн, Эруин** (Data for X-ray analysis. Vol. II. Tables for computing the lattice constant of cubic crystals. Parrish W., Ekstein M. G., Irwin B. W., 81 pp., Philips' Technical Library, Eindhoven, 1953, 2 doll.) (англ.)

Этот том содержит следующие таблицы: для целого N, $1 \leqslant N \leqslant 378$, все комбинации целых h, k, l, для которых $N = h^2 + k^2 + l^2$; таблицы $\frac{1}{2}\lambda\sqrt{N}$ для такого N и для некоторых выбранных λ, представляющих физический интерес; четырехзначную таблицу $\sin^2\theta$ для $\theta = 10{,}0°(0{,}1°)89{,}9°$ (взято из International tables for the determination of crystal structures, vol. II, rev. ed., Edwards Bros., Ann. Arbor, Mich., 1944); трехзначную таблицу $^1/_2(\cos^2\theta / \sin\theta + \cos^2\theta / \theta)$, $\theta = 10{,}0°(0{,}1')88{,}9°$ (перепечатано из Nelson, Riley, Proc. Phys. Soc., 1945, 57, 160—177).

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 11, 1125.

См. также: 551, 552, 558 К, 699, 741, 769, 773, 791, 812, 814

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

982. **Цифровые вычислительные машины Манчестерского университета. Килберн, Тутилл, Эдвардс, Поллард** (Digital computers at Manchester University. Kilburn T., Tootill G. C., Edwards D. B. G., Pollard B. W.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1953, **100**, ч. II, № 77, 487—500 (англ.)

Описываются две цифровые вычислительные машины, построенные в Манчестерском университете.

Экспериментальная последовательная машина, работающая с 1948 г., оперирует после модернизации с 40-разрядными двоичными числами.

Внутреннее запоминающее устройство электростатическое и состоит из четырех электроннолучевых трубок, каждая из которых вмещает 32 двоичных числа по 40 разрядов (1280 двоичных разрядов). Числа вводятся в запоминающее устройство и выводятся из него последовательно, так что на каждой строке растра размещается одно число.

Первоначально была принята система чтения— записи «точка — тире», но затем ее заменили системой «фокус — дефокус», как менее чувствительной к неоднородностям экрана.

Код команды состоит из 20 разрядов, так что полное число вмещает 2 команды. Система программирования одноадресная.

5 разрядов кода команды используются для указания адреса числа, 3 разряда — для кода операций, остальные зарезервированы на случай увеличения объема запоминающего устройства. Кроме главного запоминающего устройства, имеются еще две электроннолучевые трубки, одна для запоминания выполняемой команды (трубка С) и другая, называемая аккумулятором, для кратковременного

запоминания выбранного из запоминающего устройства числа (трубка А). Арифметические операции сложение и вычитание происходят следующим образом. Два числа одновременно считываются из главного запоминающего устройства и из аккумулятора и разряды чисел последовательно подаются на одноразрядное вычитающее (суммирующее) устройство (сумматор). Результат, получаемый на выходе сумматора, последовательно вводится в аккумулятор.

Машина может выполнять сложение, вычитание, три логические операции и умножение, при котором 80-разрядное произведение добавляется к содержимому аккумулятора.

Имеется промежуточное запоминающее устройство на барабане, покрытом никелем. На барабане расположено 47 дорожек, на каждой из которых помещается 2560 двоичных разрядов. В 1949 г. в машине было 800 пентодов и 1000 диодов.

В июле 1951 г. начала работать новая машина. Главное запоминающее устройство новой машины состоит из 8 электроннолучевых трубок и вмещает 10 240 двоичных разрядов или 512 20-разрядных двоичных чисел.

Предусмотрено дальнейшее расширение запоминающего устройства до 16 трубок. Код команды состоит из 20 разрядов. Первые 10 разрядов используются для указания адреса команды, т. е. номера строки и трубки, следующие 3 разряда используются для управления В-трубкой (см. ниже) и 6 разрядов — для указания операции. Всего в машине 52 различные операции. Список операций приведен в приложении. Предусмотрены операции с двойным числом разрядов (40 разрядов).

Магнитный барабан имеет диаметр примерно 150 *мм* и длину 216 *мм*. На барабане может быть размещено 256 дорожек, на каждой из которых помещается 2560 двоичных разрядов (128 чисел), т. е. вдвое больше, чем на одной трубке. В настоящее время используется только 112 дорожек. На каждой дорожке находится своя магнитная головка с отдельными обмотками для чтения и записи.

Передача данных блоком по 64 или 128 чисел (содержимое одной или двух трубок) из магнитного запоминающего устройства в электростатическое и обратно производится специальной операцией переноса.

Первые 10 разрядов команды переноса указывают номер половины дорожки на барабане, следующие 4 разряда указывают операцию (направление переноса), а 4 последних — номер трубки.

Скорость вращения барабана синхронизирована с частотой развертки для сокращения времени переноса блока. Имеется схема совпадения между адресом строки на трубке и номером дорожки на барабане, при срабатывании которой начинается передача чисел из одного запоминающего устройства в другое.

Чтобы ускорить производство умножения, в новой машине применена параллельная схема умножения, состоящая из сумматоров и линий задержек, которые включены так, что все частные произведения суммируются одновременно, а не последовательно, как в малой машине. Новое множительное устройство лишь на 10% увеличивает размеры машины (см. РЖМат, 1953, 477).

Операции сложения и вычитания выполняются с помощью аккумулятора, который включает в себя трубку для запоминания 4 20-разрядных чисел, сумматор, вычитающее устройство и схемы для выполнения логических операций «и» и «или». Сложение и вычитание последовательное. Время выполнения сложения 1,2 *мсек*., умножения 2,6 *мсек*.

Как и в малой машине, имеется блок так называемой В-трубки, который предназначен для ускорения преобразования команд. На экране В-трубки в новой машине размещается 8 строк для запоминания специальных чисел, используемых для преобразований команд. Основные команды записаны в неизменном виде в главном запоминающем устройстве. Перед выполнением каждого шага вычисления соответствующие адреса команд изменяются путем добавления к ним специальных чисел, хранящихся в В-трубке. После выполнения каждого шага итерационного процесса содержимое В-трубки (на соответствующей строке) увеличивается на единицу. В каждой команде специальные разряды указывают, должна ли команда преобразовываться в блоке В-трубки и какое из 8 чисел должно к ней добавляться.

Ввод данных в машину производится посредством 5-позиционной бумажной перфоленты. Вывод данных производится с помощью телетайпа с печатью на бумагу и перфоленту.

Схема построена так, что ввод и вывод данных в машину производится во время вычислений. Скорость ввода в старой машине была 6—7 знаков/сек, в новой машине максимальная скорость 250 знаков/сек (РЖМат, 1954, 2757—2760).

Управление машиной и контроль за ее работой производятся с панели управления. Здесь имеется 20 ручных переключателей, с помощью которых можно вручную проверить ход вычислений, а также включить машину на автоматическую работу.

На панели управления находится также 4 электроннолучевых трубки диаметром 75 *мм*, на которых можно наблюдать содержимое аккумулятора, множительного устройства, В-трубки и трубки управления. На двух трубках диаметром в 150 *мм* можно наблюдать содержимое любой пары трубок главного запоминающего устройства.

Чтобы облегчить первоначальную проверку программы, введены 2 специальных кода остановки, с помощью которых можно остановить вычисления в заданном месте программы.

Отыскание неисправностей в машине производится с помощью разнообразных контрольных программ. Вкратце описана методика обнаружения дефектных элементов (см. реф. 983).

Новая машина содержит 4050 ламп, из них 2350 диодов CV 1092. Большую часть остальных ламп составляют пентоды типа CV 1091 и CV 173, имеется 200 миниатюрных пентодов типа CV 138.

За 2085 час. работы были заменены 69 пентодов и 35 диодов, в то время как из 15 000 других компонент из строя вышли всего восемь. За это же время заменены три электроннолучевые трубки.

В приложении к статье подробно описан принцип построения различных команд, а также схема параллельного множительного устройства и устройства для ввода и вывода данных.

Т. М. Александриди

983. Конструкция и работа вычислительной машины Манчестерского университета. Поллард, Лонсдейл (The construction and operation of the Manchester University computer. **Pollard**

B. W., Lonsdale K.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1953, **100**, ч. II, № 77, 501—512 (англ.)

Описываются основные электрические схемы и конструкция вычислительной машины Манчестерского университета, а также обсуждается опыт ее эксплуатации.

Проектирование машины начато летом 1949 г., эксплуатация — в июле 1951 г. При разработке электрических схем и конструкции как машины в целом, так и отдельных узлов исходили из задачи обеспечения надежности машины, а также удобства профилактики и ремонта.

Все электрические схемы машины построены из стандартных элементов: триггеров, формирующих схем, катодных повторителей и диодных дешифраторов.

В формирующих схемах и катодных повторителях используются пентоды EF50 и EF55, в дешифраторах — подогревные диоды EA50. Триггер собран на двух пентодах EF50 по схеме с анодно-экранной связью. Запуск триггеров осуществляется через диоды EA50. Амплитуда запускающего импульса может колебаться от 4,1 до 58 *в*. Во всех формирующих схемах верхний уровень выходного импульса привязан диодом EA50 к напряжению +50 *в*, что обеспечивает хорошие фронты импульсов и стабильный уровень независимо от чередования импульсов.

Большая часть узлов вычислительной машины собрана на стандартных уголковых шасси, сделанных из листовой стали толщиной 1,25 *мм*. На каждом шасси может разместиться 8 пентодов, 27 диодов, 66 различных элементов схемы и трансформатор накала. Каждое шасси имеет 28 клеммных контактов, по 14 с каждой стороны, для подачи питающих напряжений и соединения с другими блоками.

Открытая конструкция шасси и размещение элементов на специальных бакелитовых планках в некотором отдалении от ламп предохраняют схему от перегрева. Эти шасси монтируются на рамах из алюминиевого сплава, по 6 или 4 шасси на каждой раме. Рамы крепятся к скобкам на петлях, так что могут поворачиваться на некоторый угол. Все соединения с рамой сделаны гибкими проводами. В нижней, более широкой части стойки, помещаются блоки электростатического запоминающего устройства, над ними горизонтально размещены импульсные цепи.

Стандартная стойка содержит 8 блоков электростатического запоминающего устройства, 4 рамы, содержащие 6 шасси, и 2 рамы, содержащие 4 шасси.

Машина состоит из 5 таких стандартных стоек и одной стойки магнитного запоминающего устройства.

В центре каждой стойки находится вертикальная панель, на которой выполнена разводка питания и импульсных цепей к отдельным блокам стойки. Верхние части стоек имеют вид шкафов и закрываются металлическими дверями.

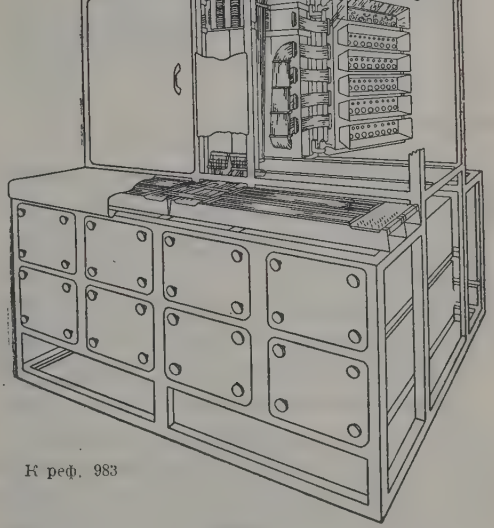
Размеры стойки 162×100×210 *см*. Чертеж общего вида приведен на фиг. 1.

Стандартный блок электростатического запоминающего устройства содержит электронную трубку и усилитель к ней. Основные требования, предъявляющиеся к этой конструкции — надежная защита от механических, электростатических и электромагнитных воздействий. Запоминающая трубка располагается горизонтально в трубе из мю-металла, окруженной снаружи концентрическим стальным экраном.

С двух сторон эти цилиндры ограничиваются плоскими панелями. На горизонтальной панели размещен усилитель. Перед экраном трубки помещается подвижная сигнальная пластина, отделенная от металлического экрана изолирующим кольцом. Это кольцо служит также для обеспечения надежного контакта между экраном и сигнальной пластиной. Сигнальная пластина экранированным кабелем соединяется со входом усилителя.

Блок трубки устанавливается в шкафу на раму из изоляционного материала для того, чтобы контакт с корпусом был только в одной точке. Блоки генераторов отклоняющих напряжений смонтированы в закрытых коробчатых шасси, установленных на амортизаторах. В коробках высверлены отверстия, чтобы обеспечить достаточное охлаждение без ухудшения электростатической экранировки. К блокам трубок отклоняющие напряжения подаются коаксиальными кабелями. Кратко описываются схемы блоков отклоняющих напряжений, которые построены по общепринятым принципам.

Магнитное запоминающее устройство может вместить 665 600 двоичных разрядов, что эквивалентно емкости 512 электростатических трубок. Однако полностью оно не используется.

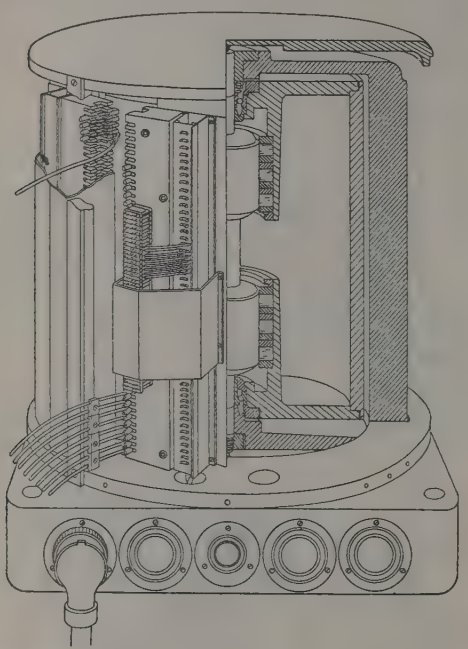


К реф. 983

Фиг. 1

Барабан представляет собою медную трубу, диаметром 25,4 *см*, длиной 31,5 *см* и толщиной 12,7 *мм*. Барабан вращается синхронно с частотой генератора отклоняющих напряжений машины. Ось барабана установлена вертикально. Никелевое покрытие поверхности барабана должно быть совершенно чистым и однородным. Вдоль образующей барабана расположены магнитные головки, предназначенные как для записи, так и для чтения. Зазор между головкой и барабаном 0,01 *мм*. Эксцентриситет барабана менее 0,0025 *мм*.

Чтобы устранить какие бы то ни было механические вибрации, барабан очень точно балансируется. Центр тяжести барабана совпадает с точностью до 1 μ с центром вращения. Приводятся чертежи барабана (см. фиг. 2) и магнитной головки.



К реф. 983

Фиг. 2

Мощность, потребляемая машиной Манчестерского университета: по напряжению 6,3 *в* — 1 300 *а*, +300 *в* — 10 *а*, +200 *в* — 12 *а* и —150 *в* — 12 *а*.

Было установлено, что электроннолучевые трубки чрезвычайно чувствительны к влиянию переменного магнитного поля с частотой 50 *гц*, причем трудно сделать достаточно хорошую магнитную экранировку. Поэтому в качестве источника переменного напряжения используется отдельный генератор на 115 *в* 1 600 *гц*. Это позволило сделать на каждом шасси свой миниатюрный накальный трансформатор. Приведена схема питания вычислительной машины.

Для отыскания неисправностей в машине имеется ряд контрольных программ как для проверки работы машины в целом, так и отдельных ее узлов. Эти программы постоянно хранятся в магнитном запоминающем устройстве. Описана методика обнаружения неисправностей и профилактической проверки.

Приводятся данные о работе машины за период в 61 неделю. Имеется ряд таблиц, характеризующих надежность работы машины, а также отдельных ее узлов. Вводится понятие о коэффициенте полезного действия машины $100\,(T_0 - T_f)/T_0\,\%$, где T_0 — полное время работы машины, T_f — время, затрачиваемое на устранение неисправностей. В среднем коэффициент полезного действия машины составляет 80%.

За 3791 час. работы вычислительной машины было 343 ошибки, т. е. в среднем одна ошибка за 11,1 часа работы. Наибольшее количество ошибок приходится на электростатическое запоминающее устройство и входное-выходное оборудование.

Дается таблица, анализирующая неисправности в машине по типам, из которой видно, что примерно в 50% случаев причиной неисправностей является выход из строя электронных ламп.

Машина содержит примерно 4070 электронных ламп. *Т. М. Александриди*

984. **Инженерный опыт проектирования и эксплуатации электростатического запоминающего устройства большой емкости. Лог, Бреннеман, Кёлш** (Engineering experience in the design and operation of a large scale electrostatic memory. Logue J. C., Brennemann A. E., Koelsch A. C.), Convent. Rec. I. R. E., 1953, ч. 7, 21—29 (англ.)

Рассматривается электростатическое запоминающее устройство для электронной цифровой вычислительной машины ИБМ-701 (РЖМат, 1954, 1853—1855, 2375—2377). Емкость памяти 2048 чисел по 36 разрядов. Указывается, что запоминающее устройство работает при значении коэффициента допустимого числа чтений (см. реф. 986) равном 171. Устройство конструктивно оформлено в виде каркаса с 36 выдвижными блоками и отсеком отклоняющей схемы. В каждом блоке две 75-*мм* катоднолучевые трубки. Цикл работы и регенерации равны 12 μ сек., причем за время цикла регенерации производится регенерация двух адресов. Для записи принята система точка — тире. Схема регенерации основана на подавлении стандартного импульса импульсом считывания тире. 6-ламповый усилитель считывания имеет коэффициент усиления 70 000 с полосой пропускания от 210 *кгц* до 1,6 *мгц* со временем установления 1,5 μсек. Специальные резиновые держатели устраняют вибрацию сигнальной пластины и вызываемую этим модуляцию сигнала. Применение стеклянных сигнальных пластин, с нанесением на них проводящего слоя дало возможность визуального наблюдения растра. Диодное ограничение обеспечивает постоянство импульса подсветки трубок. Для устранения положительного выброса впереди сигнала точки, получающегося из-за емкостной связи сетки катоднолучевой трубки с сигнальной пластиной, применено серебрение внешней поверхности трубки и рассмотрен вопрос о ее лучшем заземлении. В устройстве использована отклоняющая схема, не требующая применения прецизионных безиндукционных сопротивлений. Эта схема основана на суммировании на общих сопротивлениях токов парафазных стабилизаторов, коммутируемых различными каналами.

Схема работает по принципу суммирования токов на общем сопротивлении. Источниками тока являются ламповые стабилизаторы тока. Токи стабилизаторов в каждой схеме развертки относятся между собой, как $2^n\,(n = 1 \div 4)$. Подбор ламп для стабилизаторов производился с учетом получения минимального микрофонного эффекта. Ошибка отклоняющей системы должна быть не более 0,1 от диаметра луча, что соответствует точности установления 0,05%. Ввиду того, что линейное изменение отклоняющего напряжения при тире дает бо́льшую величину и однородность сигнала,

чем при ступенчатом изменении напряжения, применен генератор линейного напряжения с парафазным выходом, связанным через сопротивление с суммирующими сопротивлениями отклоняющей системы. Устройство имеет отдельные стабильные источники питания, что особенно важно для получения большого числа допустимых считываний.

Рассмотрен вопрос борьбы с эффектом увеличения удельной проводимости фосфора под действием бомбардирующего луча.

Испытание памяти и выявление дефектных блоков производится как специальными контрольными программами, так и специальным внутренним испытателем, предусматривающим испытание по всем точкам растра на допустимое число считываний, которое должно быть более 200. Производится также механическое испытание на сотрясение, производимое электрическим путем. *Л. А. Любович*

985. Испытания катоднолучевых трубок типа Вильямса для запоминающего устройства. Робинсон (The testing of cathode ray tubes for use in the Williams type storage system. Robinson A.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 Sept., 1953, 42—45 (англ.)

Описывается аппаратура и методика испытаний электростатических трубок типа Вильямса (VCRX 266) для запоминающего устройства вычислительной машины в Манчестере, а также приводятся некоторые статистические данные.

Для трубок, работающих в Манчестерской машине, принят растр, состоящий из 65 строк по 20 точек в каждой строке. Длительность обращения к одной ячейке составляет 10 *мксек.*, время обращения к одной строке составляет 240 *мксек.* Из них 40 *мксек.* отводится на гашение обратного хода луча.

Система записи: код «0» записывается фокусированным лучом, код «1» — расфокусированным.

Весь комплекс испытаний трубок разбит на три класса:

1. Общий контроль качества электронной пушки и мишени.
2. Испытания трубки в качестве накопителя.
3. Специальные испытания качества мишени.

В первый класс испытаний, которые производятся на месте изготовления трубок, входят испытания тока луча и его фокусировки, а также степени астигматизма трубки. Небольшой астигматизм допускается. В этот класс входит проверка формы растра трубки и его центровка, что важно, так как индивидуальная регулировка растра в схеме отсутствует.

Во второй класс испытаний входят испытания на равномерность вторичной эмиссии по экрану. Автор вводит критерий допустимой неравномерности вторичной эмиссии.

Основное испытание для трубок как запоминающих устройств состоит в проверке, насколько надежно сохраняется содержимое в трубке при частом обращении к соседним ячейкам экрана. Ток луча устанавливается минимальным, но достаточным для того, чтобы происходила полная перезапись «нулей» на «единицы» и обратно по всему растру.

Контроль заключается в том, что одна из строк выбирается 65 раз в промежутке между двумя регенерациями всего растра. При этом наблюдают, насколько уменьшаются отрицательные сигналы «нулей», получаемые с соседней строки.

Негодными считаются трубки, в которых на строках, соседних с выбираемыми, вместо «нулей» запишутся во время контроля «единицы».

В третьем классе испытаний указаны только испытания на так называемое «горение», фактически — на срок службы мишени. Они состоят в многократной записи кода «1» на какое-либо место мишени до тех пор, пока в результате выгорания покрытия мишени импульс, считываемый с этого места, не уменьшится до определенного уровня от считанного первоначально. Явно критерий годности не указан.

Аппаратура для испытаний описана коротко. Всего в установке 328 ламп. Имеется контрольная электронолучевая трубка, подключаемая параллельно испытуемой трубке, для наблюдения хранимых кодов. Приведены результаты испытаний двух партий трубок, одна из которых состоит из отбракованных ранее другими методами. Результаты иллюстрируют преимущества систематизированных испытаний: часть отбракованных ранее трубок оказалась годной. *И. Д. Визун*

986. Программа проверки трубок Вильямса. Чжу, Клейн (Williams tubes selection program. Chu J. C., Klein K. J.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 Sept., 1953, 110—114 (англ.)

Обычные осциллографические трубки, используемые для запоминающих устройств, имеют два основных недостатка: плохая фокусировка, следствием чего является малое допустимое количество повторных обращений к одной ячейке, и неоднородность покрытия экрана (фосфора). В настоящее время фирма RCA на заводе в Ланкастере (Пенсильвания) осваивает производство специальных трубок с хорошей фокусировкой и однородной запоминающей поверхностью.

Для выбора типа трубки для запоминающего устройства вычислительной машины ОРАКЛЕ (ORACLE) было испытано несколько типов обычных осциллографических трубок и несколько опытных образцов специальных трубок RCA. Так как в запоминающем устройстве машины ОРАКЛЕ предполагалось применить систему из двух трубок (РЖМат, 1954, 4937) для уничтожения эффекта неоднородности экрана, то основное внимание при испытаниях уделялось измерению допустимого количества обращений к одной ячейке.

Из известных систем записи («две точки», «точка — тире», «точка — пятно» и «точка — круг») для испытательной установки была выбрана система «две точки», которая, как и система «точка — тире», дает наибольшее допустимое число обращений к ячейке.

От системы «точка — круг» отказались из-за возможности взаимных помех высокочастотных сигналов отклонения различных разрядов.

Для уменьшения уровня шумов усилителя (полоса усилителя 3 *Мгц*, коэффициент усиления 30 000) входное сопротивление его было выбрано минимальным — 15 000 *ом*. При этой величине сопротивления сигнал на сигнальной пластине трубки имел величину около 2/3 *мв* и отношение амплитуды выходного сигнала к уровню шумов было порядка 10:1.

Испытание на допустимое число чтений состоит в следующем: 1) на растре из 1024 элементов записываются чередующиеся «нули» и «единицы»; 2) первая из

«единиц» читается N раз, после чего растр регенерируется, причем этот процесс повторяется для всех единиц; 3) число N увеличивается до тех пор, пока хотя бы один нуль не заменится единицей. Это N и принимается за максимальное допустимое число чтений.

Эксперименты показали, что из осциллографических трубок лучшими являются трубки типа 3JP1, 70% которых выдерживают до 1000 обращений при ускоряющем напряжении 2,5 *кв*.

Опытные трехдюймовые трубки типа RCA 3611 допускают от 2000 обращений (50% всех трубок) до 1000 обращений (95% всех трубок) при напряжении 2,5 *кв*, а при напряжении 1,2 *кв* 60% их выдерживает 1000 обращений. Сейчас разрабатывается трубка такой же конструкции, но с бо́льшим диаметром экрана.

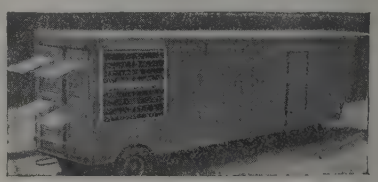
В результате испытаний решено конструировать запоминающее устройство машины ОРАКЛЕ на трубках типа 3JP1 с возможностью перехода в будущем на новые трубки RCA. Приводятся экспериментальные графики, полученные при испытании нескольких типов трубок. *В. Н. Лаут*

987. Новая электронная вычислительная машина Национального бюро стандартов ДИСЕАК (DYSEAC — the new NBS electronic computer), Techn. News Bull. Nat. Bur. Standards, 1954, **38**, № 9, 134—141 (англ.)

Сообщение о выпуске новой электронной вычислительной машины ДИСЕАК (DYSEAK). Проектирование машины было начато в 1952 г. лабораторией электронных вычислительных машин при Военном департаменте США. В мае 1954 г. машина была пущена в эксплуатацию и используется Корпусом связи армии США для специальных целей.

ДИСЕАК является машиной последовательного типа, работающей на частоте 1 *Мгц*. Числа представляются по двоичной системе. Один код включает в себе 44 двоичных разряда и разряд знака. Система программирования трехадресная, т. е. инструкция состоит из трех групп по 12 разрядов, указывающих адреса двух чисел, над которыми производится операция, и результата, а также группы кода операции. Машина имеет последовательное запоминающее устройство на ртутных линиях задержки. В каждой линии хранится 8 кодов, среднее время выбора числа 384 *мксек*. Минимальная емкость запоминающего устройства 512 кодов, хранимых в 64 линиях, расположенных в одном блоке. Емкость может быть увеличена до 4 096 кодов путем дополнительного подключения 7 аналогичных блоков. Время выполнения различных операций (с учетом среднего времени выбора числа) составляет: сложение 0,9 *мсек*., вычитание 0,9 *мсек*., накопление с проверкой переполнения 0,7 *мсек*., накопление с записью в запоминающее устройство 0,9 *мсек*., суммирование 0,8 *мсек*. (плюс 0,05 *мсек*. на код), умножение и деление по 3 *мсек*., сдвиг на длину половины кода 1,1 *мсек*., перенос 0,9 *мсек*., сравнение алгебраическое и по модулю 0,7 *мсек*., безусловный переход 0,4 *мсек*., остановка вычисления 0,4 *мсек*., вывод и ввод данных по 0,3 *мсек*. В машине имеется возможность выбора момента остановки вычислений и выбора момента ввода и вывода данных. Общее число ламп в машине 884, из них 360 приходится на запоминающее устройство (емкостью 512 кодов); общее число германиевых диодов 24 100, из них 3 100 приходится на запоминающее устройство. В машине используются субблоки только двух типов: одноламповый блок усилителя, включающий в себя некоторое число германиевых диодов (этот блок может работать как динамический триггер), и блок линий задержки, служащих для связи ламповых блоков. Всего имеется 524 одноламповых блока и 251 блок линий задержки, которые включают в себя 3 800 линий задержки (время задержки в каждой линии 0,25 *мксек*). Конструкция блоков (РЖМат, 1954, 1841) отвечает требованиям массового производства. Соединения между элементами печатаются. Объем стоек управления и арифметического узла около 4 $м^2$.

Машина размещена в двух крытых фургонах (фиг. 1), имеющих размеры $9 \times 2{,}2 \times 2{,}7$ *м*. В одном



К реф. 987 Фиг. 1

фургоне размещаются основные узлы машины и пульт управления, в другом — регулируемые источники питания постоянного тока и резервное помещение для дополнительного запоминающего устройства и экспериментальных работ. В каждом фургоне имеется холодильная установка. Полный расход воздуха 120 $м^3$ в 1 мин. Такое количество охлажденного воздуха необходимо для того, чтобы температура субблоков не поднялась выше чем на 14° по сравнению с окружающей температурой, составляющей 18°. При наличии дополнительного оборудования (передвижной электростанции мощностью 100 *ква*) машина может работать в полевых условиях.

От обычных универсальных вычислительных машин ДИСЕАК отличается тем, что может с помощью кабелей присоединяться к широкому классу устройств, которые хранят, табулируют, обрабатывают, регистрируют информацию, либо преобразуют в непрерывную форму цифровые результаты, полученные в машине. Подобные соединения позволяют осуществлять совместную работу целого ряда устройств, образующих сложную вычислительную или управляющую систему, ядром которой служит ДИСЕАК. Приводится пример, когда на совместно работающих машинах СЕАК и ДИСЕАК решалась задача, которая состояла в получении данных на машине СЕАК, передаче и дальнейшей их обработке на машине ДИСЕАК. Во время ожидания поступления новой информации от машины СЕАК, ДИСЕАК выполняет другую программу.

Передача данных в машину производится в любое время по мере их готовности. Для связи с внешними устройствами машина имеет ряд вспомогательных блоков. Переходный блок ввода — вывода принимает последовательно информацию на собственной частоте внешнего устройства и передает ее в машину на частоте 1 *Мгц*, либо, наоборот, принимает информацию из машины на частоте 1 *Мгц* и передает ее во внешнее устройство на его соб-

ственной частоте. Селекторный блок выбирает внешнее устройство, с которым должны выполняться операции ввода и вывода. Он выбирает одно из 48 реле, каждое из которых работает на свой канал. В дальнейшем селекторный блок будет расширен для коммутации 256 каналов, например таких, как каналы магнитного барабана или магнитных лент. Имеется два блока, позволяющих согласовывать машину с реальными объектами. Один из них может управлять устройством для преобразования цифровых данных в непрерывные (при выводе из машин), другой служит для преобразования чисел, поступающих из внешнего устройства параллельно с произвольной частотой, в последовательный код с частотой 1 *Мгц* для передачи в машину.

Имеется блок, который согласовывает момент ввода и вывода с ходом внутренней программы. Кроме вывода данных на внешние устройства, предусмотрена возможность вывода на телетайп и магнитную ленту. То же самое относится и к вводу. Логическое построение машины позволяет прервать выполнение программы в любом месте и ввести из внешнего устройства либо с ручного клавишного аппарата новые команды и числа. Ввод новых команд и чисел может производиться и одновременно с выполнением вычислений по внутренней программе. Темп вычислений по внутренней программе может автоматически согласовываться с темпом поступления внешней информации. Машина имеет широкие возможности для применения, начиная с управления многоканальными линиями связи и кончая сложными видами расчетов, например, различные деловые расчеты, где вместе с постоянными исходными данными используются временные (подсчет зарплаты). Другим важным объектом для применения ДИСЕАК является управление воздушным сообщением в непосредственной близости от аэропорта, где оператор должен постоянно визуально наблюдать информацию, имеющуюся в машине и вводить в нее поправки. Возможно также использование машины для управления производственными процессами, представляющее собой первый

К реф. 987 Фиг 2

шаг к автоматическим заводам. ДИСЕАК может с успехом совмещать все элементы автоматического управления: хранение программы производственного процесса, восприятие хода процесса, анализ принятой информации и, наконец, непосредственное воздействие на инструмент.

Приводится фото пульта управления (фиг. 2).

Л. С. Легезо

988. **Гигантские вычислительные машины могут помочь при воздушной обороне.** **Класс** (Giant «brains» could aid air defense. Klass Philip), Aviat. Week, 1953, 58, № 19, 67—68, 71, 73 (англ.)

Кратко описываются электронные вычислительные машины ИРА-1103 (ERA1103) и ИБМ-701 (IBM701) (РЖМат, 1954, 1849, 2375—2377). Получая от локационных станций сведения о местонахождении, скорости, численности атакующего по воздуху противника, а также о расстоянии до него, эти машины могут управлять движением самолетов-перехватчиков и ракет. ИРА-1103 и ИБМ-701 являются машинами параллельного действия. ИРА-1103 выполняет 14 000 сложений и 4000 умножений в 1 сек., рабочая частота 500 *кгц*, в машине 4500 ламп. ИБМ-701 выполняет 16 000 сложений и 2000 умножений в 1 сек., рабочая частота 1 *Мгц*, имеет 4000 ламп. ИБМ-701 имеет электростатическое запоминающее устройство на электроннолучевых трубках на 2048 адресов (на каждом адресе хранится число из 10 десятичных цифр и знак числа) и запоминающее устройство на магнитном барабане на 8192 адреса. ИРА-1103 имеет запоминающее устройство на электроннолучевых трубках на 1024 адреса и запоминающее устройство на магнитном барабане на 16 384 адреса. Кроме того обе машины располагают обширными запоминающими устройствами на магнитной ленте, хранящими по 200 000 чисел каждое. Время выбора числа из электростатического запоминающего устройства ИРА-1103 составляет 6—10 *мксек.* и из магнитного запоминающего устройства на барабане 8,5 *мсек.* Для ИБМ-701 соответственные времена равны 12 *мксек.* и 30 *мсек.* Магнитное запоминающее устройство на барабане в ИБМ-701 используется лишь в качестве внешнего, в ИРА-1103 — в качестве внешнего и оперативного запоминающего устройства. При использовании барабана в качестве внешнего запоминающего устройства из него в течение 1 сек. можно перенести в электростатическое запоминающее устройство около 30 000 чисел. Вывод данных в обеих машинах осуществляется с помощью записи на магнитную ленту, на перфоленту или на перфокарты, либо с помощью печати на телетайпе. Скорость печати на телетайпе составляет 1050 чисел в 1 мин., скорость записи на магнитную ленту 1250 чисел в 1 сек. ИБМ-701 работает по одноадресной системе, ИРА-1103 — по двухадресной. Кроме обычных операций, ИРА-1103 выполняет операцию «умножение со сложением», позволяющую подсчитывать сумму произведений $(A \times B) + (C \times D)$, и операцию «повторение команд», позволяющую повторить любое количество операций необходимое число раз.

Л. С. Легезо

989. **Вычислительная машина специального назначения.** **Уокер** (A special purpose digital computer. Walker J. P., Jr.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, 7, № 43, 190—195 (англ.)

Сообщение о двоичной электронной вычислительной машине для решения систем линейных алгебраических уравнений. Машина рассчитана на решение максимально 1200 уравнений с получаемой точностью 1%. Решение производится по итерационному методу Гаусса — Зейделя. В машине имеются 2 типа запоминающих устройств. Для матричных коэффициентов и адресов неизвестных используется магнитная лента,

движущаяся со скоростью 38 *см/сек*. Коэффициенты считываются с ленты со скоростью 20 чисел в 1 сек. Число содержит 25 двоичных цифр. Для хранения неизвестных используется магнитный барабан, вращающийся со скоростью 59 об/сек с максимальным временем выборки 17 мсек. Емкость запоминающего устройства на магнитном барабане определяется максимальным числом уравнений и равна 1200 числам. Числа на барабане расположены последовательно по 64 числа из 25 двоичных цифр на каждой из 19 дорожек барабана. Плотность записи приблизительно 3 импульса на 1 *мм* по окружности.

В арифметическом устройстве имеется 3 регистра: регистр множимого, регистр множителя и регистр произведения. Регистр множимого и регистр множителя имеют по 25 разрядов, из которых 20 занято числом и 5 порядком числа. В этих регистрах двоичная запятая может быть расположена перед любым разрядом числа. Регистр произведения имеет 40 разрядов и запятая помещается в середине. Каждый регистр может использоваться как сдвигающий и накапливающий регистр.

Для сложения или вычитания требуется 200 *μсек*, и для умножения или деления 8 мсек. Машина была в эксплуатации около трех месяцев. Решались две системы — 73 и 793 порядка. На каждую итерацию потребовалось соответственно 3 и 20 мин., 15 итераций было достаточно для получения требуемой точности.

В. М. Тарасевич

990. Проектирование недорогой универсальной вычислительной машины. Доббинс (Designing a low cost general purpose computer. Dobbins Willis E.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 Sept., 1953, 28—29 (англ.)

В качестве примера недорогой универсальной вычислительной машины рассматривается машина CRC-102A (РЖМат, 1954, 4205), рассчитанная на обслуживающий персонал невысокой квалификации.

Система кодирования в машине трехадресная; приведен перечень выполняемых операций. Кроме внутреннего запоминающего устройства на магнитном барабане, предусмотрено внешнее устройство на магнитной ленте емкостью 100 000 чисел.

Магнитный барабан имеет емкость 1024 числа; диаметр барабана 300 *мм*. По образующей барабана расположено 16 дорожек, на каждой из которых хранится 64 числа. Предполагаемые габариты главного шкафа машины 1,5×0,75×2,0 *м*. Отдельно размещаются пульт управления с телетайпом и устройство ввода с магнитной ленты.

И. М. Старостин

991. Вычислительная машина Аргоннской лаборатории (Argonne build another computer), Midwest Engr, 1953, **6**, № 4, 20 (англ.)

Сообщение о вычислительной машине ОРАКЛЕ, построенной Аргоннской национальной лабораторией (США) для Окриджской лаборатории (США) (РЖМат, 1954, 4936—4938). В машине насчитывается 3 500 электронных ламп, 20 000 сопротивлений и около 12 *км* провода. Арифметический узел имеет размеры 400×70×210 *см*. Внутреннее запоминающее устройство имеет приблизительно те же размеры. Оно состоит из отдельных блоков, в каждом из которых имеются 2 трехдюймовые катодно-лучевые трубки и 22 электронные лампы. Для быстроты замены дефектных блоков на 3 запасных блока постоянно подаются питающие напряжения. Стоимость машины 350 000 долларов.

Л. С. Легезо

992. Автоматическая вычислительная машина СВАК (An automatic computer SWAC), Iron Age, 1953, **172**, № 14, 142 (англ.)

Сообщение о работе автоматической вычислительной машины СВАК (РЖМат, 1954, 3094). Машина работает 5 дней в неделю по 24 часа в сутки, решая задачи из области физики, техники, математики, статистики и метеорологии. Приводятся кратко некоторые данные машины.

Приведены фотографии блока запоминающего устройства на электроннолучевых трубках.

М. П. Сычева

993. ОАРАК. Гейер (The OARAC. Geyer Bernard H.), Radio and Telev. News, 1953, **50**, № 4, 83, 180—181 (англ.)

Дается популярное изложение устройства и принципов действия вычислительной машины ОАРАК (OARAC) (РЖМат, 1954, 1842—1848). В качестве примера приводится с объяснениями программа вычисления многочлена $y = 3x^2 + 5x + 2$ при значениях x, меняющихся от 1 до 1000 через 1. Кроме того, дополнительно сообщается, что каждый из трех оперативных регистров арифметического устройства состоит из 44 электронных ламп и 352 кристаллических диодов.

Е. А. Волков

994. Вычислительная лаборатория. Олт (Computation laboratory. Alt Franz L.), Lab. Practice, 1954, **3**, № 1, 33—35 (англ.)

Вычислительная лаборатория является одной из четырех лабораторий отдела прикладной математики Бюро стандартов, основанного в 1946 г. Лаборатория оснащена новейшими вычислительными машинами.

Основное оборудование:

1. СЕАК (SEAC — высокоскоростная электронная последовательная автоматическая машина) (РЖМат, 1954, 3486).

2. Четыре электронных перфоратора типа ИБМ-604. Эти машины выполняют сложение, вычитание, умножение и деление, пробивают результаты вычислений на перфокартах, могут хранить некоторые результаты для последующих операций. Машина обрабатывает 100 карт в 1 мин.

3. Электронный перфоратор CPC (CPC — Card Programmed Calculator). В этой машине программа вычислений подается при помощи перфокарт. Машина состоит из следующих узлов: табулятора, суммирующего перфоратора, арифметического и запоминающего узлов.

4. Электронная сортировочная машина типа 082.

5. Мелкие вспомогательные машины.

Приводятся примеры вычислений, выполненных лабораторией. Перечень вычислений, выполненных лабораторией, занимает примерно половину статьи.

А. Н. Зимарев

995. Самопрограммирующие вычислительные машины (Self-programming computers), Sci. News Letter, 1953, **63**, № 1, 3—4 (англ.)

Статья общего характера. В частности, указывается, что в электронике и вычислительной технике должны найти широкое применение полупроводниковые триоды из кремния и кремниевых сплавов. *Л. Н. Королев*

996. Программа по повышению надежности работы ламп в машине УНИВАК. Хинкельман, Краус (The UNIVAC tube program. Hinkelman Thomas D., Kraus Max H.), Trans. I. R. E., 1953, EC-2, № 3, 8—12 (англ.)

Электронные лампы работают в вычислительных машинах надежно, если правильно выбраны типы ламп при проектировании машины, если лампы, а также детали электрических схем перед установкой в машину подвергаются тренировке и если в процессе эксплуатации машины систематически производится проверка запаса характеристик ламп. Наблюдения, проводимые за работой ламп в вычислительной машине типа УНИВАК № 1 в течение 16000 часов, а также общие данные о работе четырех других машин этого типа, показали высокую надежность работы ламп.

При проектировании вычислительной машины типа УНИВАК, проводимом в 1948 г., был учтен опыт трехлетней работы ламп в вычислительной машине типа ЭНИАК. Таким образом выбор типов ламп производился достаточно обоснованно.

В вычислительной машине типа УНИВАК используется всего 5612 ламп. Комплект ламп:

типа 25L6	3950 шт.	типа 6AL5	200 шт.
типа 6AK5/5591 . .	400 шт.	типа 6AN5	150 шт.
типа 6AK7	350 шт.	типа 6BE6/5915 . .	100 шт.
типа 28D7	250 шт.	типа 6SN7	50 шт.

Разработка схем элементов вычислительной машины производилась с учетом того, что анодный ток лампы (при нуле на сетке относительно катода) в течение срока службы может снизиться до 50% относительно минимального значения для новых ламп. Мощность рассеяния анода или экранной сетки, где это было возможно, устанавливалась около 50% от допустимого значения.

На первом этапе наблюдений выявились следующие дефекты ламп:

1. У лампы типа 6AK7 было замечено увеличение тока экранной сетки, происходящее в течение срока службы. Поэтому схемы, в которых применяется 6AK7, были переделаны так, чтобы уменьшить мощность рассеяния по экранной сетке.

2. В течение первых 500 час. работы у ламп типов 25L6 и 28D7 появился обратный ток сетки. В некоторых случаях величина обратного тока превышала 100 *µа*. Обратный ток сетки в лампе типа 25L6 был устранен в результате того, что промышленность реконструировала лампу путем золочения сетки. У лампы типа 28D7 обратный ток сетки был снижен до минимума путем применения напряжения накала величиной 25 *в* вместо 28 *в*.

Все лампы перед установкой в машину подвергаются испытаниям. Измеряются характеристики ламп в рабочих точках, в частности анодный ток при нуле на сетке и величина напряжения отсечки анодного тока, и наличие коротких замыканий при импульсном режиме работы. Лампы типов 6AN5 и 6AK5 подвергаются предварительному старению (первая в течение 50 час., а вторая, после замены их на лампы типа 5591, в течение 200 час.). Необходимость старения вызвана тем, что у этих ламп иногда наблюдается резкое падение крутизны. Изменение крутизны достигает 50%, происходит оно в течение первых 25 час. работы, в последующие же 50 час. значение крутизны восстанавливается. Для ламп типа 6AK5 тренировка не дает соответствующей стабилизации параметров, поэтому они были заменены на лампы типа 5591.

В процессе эксплуатации ламп в вычислительной машине периодически производится проверка их характеристик. Проверка осуществляется на специальных стендах. Нижняя граница допустимых значений параметров ламп выбрана несколько выше тех значений, которые вызывают фактические отказы в работе. Частота повторения проверок определяется скоростью ухудшения характеристик от предела, установленного для профилактики, до значения, вызывающего отказ в работе. За 16 000 час. работы около 80% случаев отказов ламп было выявлено во время профилактик. Основные дефекты ламп: низкая эмиссия, малая отсечка, большая утечка катод — нить накала. Во время работы машины лампы выходят из строя в основном из-за перегорания нити накала и коротких замыканий. В последнее время был проведен опыт по определению дефектных ламп при работе их в машине путем снижения напряжения накала.

Выход из строя ламп типа 25L6 составляет 1,34% на тысячу часов работы. При этом в 80% случаев дефектную лампу можно заранее выявить путем профилактической проверки. Таким образом, можно предположить, что простои вычислительной машины по причине выхода из строя ламп будут происходить достаточно редко.

Материалы наблюдений предполагается использовать для разработки более совершенной методики проверки ламп для вычислительных машин типа УНИВАК. *В. А. Зимин*

997. Надежность ламп в цифровых вычислительных машинах. Найт (Valve reliability in digital calculating machines. Knight L.), Electronic Engng, 1954, 26, № 311, 9—13 (англ.)

Всесторонне рассматривается проблема увеличения надежности работы ламп в цифровых машинах. Разбираются основные вопросы, связанные с проектированием и эксплуатацией машин в свете более правильного использования электронных ламп.

1. Выбор типа ламп. В вычислительных машинах необходимо применять лампы с временем службы до 20 000 час. Следует избегать ламп, выпускаемых малыми сериями, так как их параметры сильно меняются от условий производства. Предпочтительнее малогабаритные лампы, выпускаемые большими сериями. Эти лампы хорошо воспринимают вибрации и удары. Основной их недостаток — плохой контакт в панелях — можно устранить с помощью припаивания штырьков к панели. При выборе типа ламп следует иметь в виду, что толстый катод разрушается быстрее тонкого и что спиральная нить накала служит дольше, чем прямая согнутая.

2. Уменьшение выхода ламп из строя. Хорошие результаты дает использование ламп при пониженном накале, особенно при снижении тока через лампу. В машине ЭНИАК при

подаче на анод и экранную сетку лампы половины номинального напряжения и при прохождении 0,25 номинального тока через лампу оптимум напряжения накала лежал между 6 *в* и 6,3 *в*. Сильно увеличивается срок службы ламп, если применять постепенную подачу накального напряжения, избегая большого тока включения. Полезно подавать анодное напряжение после накального. Необходимо обеспечить хорошую защиту от коротких замыканий и т. п.

Серьезное внимание необходимо уделить охлаждению машины, применяя пылевые фильтры и холодильные установки.

3. Схемы, нечувствительные к уходу параметров ламп. Каждый элемент машины должен работать от импульса с широким изменением амплитуды, формы и времени. Форма напряжения на элементе должна удовлетворять необходимым условиям возбуждения следующего каскада. Чтобы амплитуды импульсов меньше зависели от тока, необходимо применять элементы с большими анодными нагрузками. В усилителях, работающих в классе А, для стабилизации амплитуды можно подать отрицательную обратную связь.

Лучше использовать триоды, чем пентоды, так как на последних труднее осуществить схемы с широким диапазоном возбуждения. Для устранения высокочастотной генерации в схемах триггеров и катодных повторителей необходимо включить в сетки ламп последовательно небольшие гасящие сопротивления.

4. Проверка ламп при установке в машину. Все лампы перед установкой в машину должны быть тренированы и проверены. Время тренировки должно быть не меньше 250 час., так как опытом установлено, что наибольшее количество ламп выходит из строя именно в течение этого времени. При проверке ламп необходимо измерить анодный ток, напряжение отсечки, обратный сеточный ток. Большой обратный сеточный ток является следствием плохого вакуума. Такая лампа скоро выйдет из строя.

5. Профилактическая проверка ламп. Лампы, стоящие в машине, необходимо периодически проверять. Хорошие результаты дает проверка при пониженном напряжении накала (5,3 *в*). Если в новых лампах ток при накале 6,3 *в* и 5,3 *в* отличается мало, то в старых разница резко возрастает. Необходимо использовать для проверки работы машины тест-программы, причем следует пускать их при измененных питающих напряжениях. Для оперативного контроля часто применяется решение задачи двумя методами с последующим сравнением результатов. В машине фирмы «Райтеон» (Raytheon) для контроля вычислений каждое число связано с заранее известным двоичным контрольным числом, с помощью которого проверяется правильность выполнения арифметических действий, передачи чисел и их хранения. В машине УНИВАК каждое число содержит вспомогательный разряд, содержимое которого дополняет число до нечетного. Нечетность периодически проверяется.

В заключение автор сравнивает лампы ECC33 и 6F32 и делает вывод, что в большинстве машин выход ламп из строя составляет 0,5 ÷ 1% на 1000 час. работы (исключая первые 250 час. работы) в течение первых нескольких тысяч часов работы. Затем процент выхода ламп из строя возрастает.

Л. С. Легезо

998. **Кто будет обслуживать новые цифровые вычислительные машины? Карр** (Who will man the new digital computers? Carr John W.), Computers and Automat., 1953, 2, № 8, 1—3 (англ.)

Указано, что к настоящему времени уже имеется целый ряд цифровых вычислительных машин: ЭДВАК (EDVAC), 6 машин типа «Принстон» (Princeton), 4 машины типа СЕАК—СВАК (SEAC—SWAC), «Вихрь» (Whirlwind I), 8 машин типа УНИВАК (UNIVAC) фирмы «Ремингтон Ранд» (Remington-Rand Eckert-Mauchly Division), 18 машин типа ИБМ-701, подготовлена к серийному выпуску машина типа ИБМ-650 и др. Кроме того, по меньшей мере 6 фирм выпускает менее крупные вычислительные машины: «Ньюклеар Девелопмент» (Nuclear Development Associates with Hogan Labs), «Элеком» (Elecom Division of Underwood Corp.), «Консолидейтид» (Consolidated Engineering Corp.), «Монробот» (Monrobot Corp.), «Компьютер Рисёрч Корпорейшн» (Computer Research Corporation Division of National Cash Register) и др.

Для обслуживания каждой из вычислительных машин требуется от 5 до 50 инженеров, математиков и специально обученного персонала, причем в настоящее время наметилось четыре типа обучения. Это, во-первых, специальные краткосрочные курсы, созданные организациями, выпускающими машины, с последующим использованием специалистов на собственном оборудовании; во-вторых, обучение в процессе эксплуатации машины; в-третьих, организация расширенных курсов по цифровой технике при некоторых университетах и технических институтах. Подготовка специалистов этими тремя путями не может удовлетворить запросам развивающейся области применения цифровой техники.

Автор утверждает, что необходимо придерживаться четвертого пути, а именно организации регулярных занятий студентов в учебных заведениях, в результате чего будут выпускаться специалисты: математики, инженеры-вычислители, бухгалтеры и др. для работы на цифровых вычислительных машинах. При этом необходимо организовать чтение курсов численного анализа, программирования, проектирования и конструирования вычислительных машин.

Отмечено, что для успешного обучения необходима практика на имеющихся вычислительных машинах, для чего несколько типов цифровых машин должны быть при учебных заведениях.

Ввиду все увеличивающегося применения цифровых вычислительных машин такое специальное обучение должно быть организовано в самое ближайшее время.

В. В. Белынский

999. **Коллоквиум по счетным устройствам. Темесвари** (Kolloquium über Rechenanlagen. Temesvary S.), Chem.-Ingr-Tchn., 1953, 25, № 12, 746—747 (нем.)

Краткий отчет о коллоквиуме по цифровым вычислительным машинам (РЖМат. 1954, 5309).

Проф. А. Вальтер (A. Walther) и д-р Дрейер (H. J. Dreyer) из Института практической математики в Дармштадте сделали сообщение о разработке новой автоматической двоичной цифровой вычисли-

тельной машины. Эта машина в некоторых отношениях похожа на вычислительную машину Марк IV Гарвардской вычислительной лаборатории, но отличается от нее выполнением вычислений с учетом порядков.

Автор большой немецкой вычислительной машины Z-4 инж. Цузе (K. Zyse) из Нейкирхена сделал сообщение о новой вычислительной машине Z-5 (РЖМат, 1954, 3864).

Кроме того, были заслушаны сообщения о строительстве быстродействующей вычислительной машины с параллельным сумматором в Математическом институте в Мюнхене и о гёттингенских машинах G1 и G2 (РЖМат, 1953, 479; 1954, 1432—1434).

Указывается, что в дальнейшем будут создаваться более быстрые вычислительные машины параллельного типа с применением запоминающего устройства на базе ферритовых сердечников.

Вторая часть заседания была посвящена вопросам программирования. Были рассмотрены вопросы составления программ с помощью вычислительных машин и составления расчетных подпрограмм.

Третья часть заседания включала рассмотрение отдельных элементов электронных цифровых вычислительных машин.

Доктором Пилоти (R. Piloty) были описаны основные элементы мюнхенской вычислительной машины, работающие на электронных лампах: триггеры, импульсные клапаны, инвертеры для превращения состояния «1» в «0» и наоборот и составные элементы суммирующего устройства. Были также рассмотрены возможности создания арифметических цепей и цепей управления без электронных ламп.

Последняя часть заседания была посвящена рассмотрению специализированных вычислительных машин для решения дифференциальных уравнений и систем линейных уравнений. *Г. И. Танетов*

1000. Влияние трения на показания интегрирующих приборов. Дрекслер (Vliv tření na měření integrujících přístrojů. Drechsler Richard), Elektrotechn. Obzor, 1953, **42**, № 6, 337—342 (чеш.; резюме русс., франц., нем., англ.)

Описывается теоретическое и экспериментальное исследование влияния трения в интегрирующих приборах (электрических индукционных счетчиках и т. д.) на точность измерения величины интеграла. Величина погрешностей измерения зависит: 1) от величины интеграла, 2) от величины отношения трения покоя к вращающему моменту прибора.

Для точного интегрирования необходимо, чтобы тормозящий момент был пропорционален угловой скорости вращения подвижной системы интегрирующего прибора (счетчика). С этой целью автор предлагает методы компенсации ошибок от трения покоя путем создания добавочного вспомогательного момента, при наличии которого общий тормозящий момент будет пропорционален скорости. Компенсирующий момент может быть получен в индукционном приборе путем подбора различных магнитных сопротивлений. Предлагаемый способ компенсации влияния трения был применен для некоторых специальных интегрирующих приборов в народном предприятии «Кршижик» (завод Карлин, Чехословакия) и с производственной точки зрения оказался простым и надежным.

Для расчета погрешностей от трения автор дает номограмму, показывающую, какой вращающий момент должна иметь подвижная система интегрирующего прибора, чтобы погрешность от трения не превзошла установленной величины. Номограмма позволяет также установить зависимость ошибки от качества механизма и влияние неравномерности параметров, при массовом производстве, на качество продукции. Для уменьшения трения автором проведено экспериментальное исследование подшипника с двумя сапфирами и дан его чертеж.

Ф. В. Майоров

1001. Исследование точности решающего элемента моделирующей установки. Шнайдман М. А., Автоматика и телемеханика, 1953, **14**, № 2, 164—176

На основе известных положений теории ошибок и результатов исследования точности электрических цепей рассматривается точность математических операций (суммирования и интегрирования суммы), выполняемых решающим усилителем постоянного тока в линейных структурных электронных моделях.

В качестве критерия точности принимается отношение абсолютной погрешности выходного напряжения усилителя к его максимальному значению. Это отношение представляется в виде суммы абсолютного значения систематической и среднеквадратического значения случайной части погрешности. Как источник систематической погрешности рассматривается конечность значения коэффициента усиления и как случайные величины — неточность установки сопротивлений на входе и в цепи обратной связи, нестабильность нулевого уровня из-за дрейфа и неточной настройки.

Устанавливается, что наибольшим весом обладают первичные погрешности вследствие конечного значения усиления и нестабильности нулевого уровня, причем общая погрешность решающего усилителя получается наибольшей в режиме интегратора сумматора. В целях увеличения точности рекомендуется ограничить значения коэффициентов передачи решающего элемента для каждого режима работы в отдельности и использовать схему автоматической стабилизации нулевого уровня, предложенную Голдбергом (Goldberg E. A., Stabilization of wideband direct—current amplifiers for zero and gain, RCA Reveiw, 1950, **11**, № 2).

Примечание референта. В работе имеются опечатки: 1) на рис. 1 и 2 направление сеточного тока i_C обозначено неверно; 2) в формуле (12) отсутствует штрих над $e(p)$; 3) в формуле (30) дробь $\frac{1}{2K}$ следует заменить на $\frac{1}{K}$; 4) в формуле (35) под знаком корня в правой части вместо $D(\Delta U_i)_{\max}$ должно стоять $(\Delta U_i)^2_{\max}$. *Б. Я. Коган*

1002. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на электронном моделирующем устройстве. Хау, Хау (Solution of linear differential equations with variable coefficients by the electronic differential analyzer. Howe Carl E., Howe Robert M.), Trans. I.R.E., 1953, EC-2, № 4, 3—8 (англ.)

Описывается релейное устройство, с помощью которого осуществляется кусочно-линейная аппроксимация произвольных функций времени. Это дает

возможность решать на машине для решения дифференциальных уравнений линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Точность решения до 0,1%.

С помощью описанного специального способа точной калибровки авторы получали точность до сотых долей процента. *В. П. Разроев*

1003. Преобразователь линейного напряжения в логарифмическое. Говард, Савант, Нейсуондер (Linear-to-logarithmic voltage converter, Howard R. C., Savant C. J., Neiswander R. S.), Electronics, 1953, 26, № 7, 156—157 (англ.)

Для выполнения операций умножения и деления в вычислительных устройствах непрерывного действия часто пользуются логарифмическим преобразователем напряжения. Весьма распространенным логарифмическим преобразователем является схема с триодом, в котором используется логарифмическая зависимость между током сетки и анодным током. Предлагается усовершенствованная триодная схема, в которой выходное напряжение пропорционально логарифму входного напряжения, т. е. $u_{вых} = -\log_a u_{вх} + u_0$, где a — основание логарифмов, различное для разных ламп, u_0 — начальный уровень выходного напряжения. Хорошая стабильность режима работы логарифмирующей лампы 12AX7 (75 *мв* в час) получена путем 500-часового «старения» этой лампы. На выходе триода 12AX7 добавлен катодный повторитель 654, который позволяет исключить начальный уровень u_0 из величины выходного напряжения. Регулировка величины основания логарифма a производится на выходе катодного повторителя. Приведена характеристика логарифмического преобразователя для трех логарифмических циклов, показывающая линейную зависимость $u_{вых}$ от $\log u_{вх}$. Величина выходного напряжения $u_{вых}$ изменяется от —10 *в* до +60 *в* при изменении входного напряжения от 0,3 до 300 *в*. Дана таблица, показывающая различные логарифмические основания и выходные напряжения, которые можно получить для некоторых типов ламп. *Ф. В. Майоров*

1004. Первый международный конгресс по измерительной аппаратуре (First international instrument congress), Techn. News Bull. Nat. Bur. Standards, 1954, 38, № 9, 125—127 (англ.)

На первом международном конгрессе по измерительной аппаратуре (Филадельфия, сентябрь 1954 г.) предполагалось обсудить более 250 докладов и экспонировать изделия 400 различных организаций. Национальное бюро стандартов (NBS) США представляет на конгресс доклады, посвященные радиоизмерительным приборам, вопросам терминологии в измерениях и управлении, высокочувствительному измерителю влажности и различным методам калибровки измерителей ускорения.

На стендах выставки должны экспонироваться измеритель влажности, специальный тестер и логарифмический омметр для снятия характеристики измерителя влажности, моделирующее устройство для решения уравнения преломления радиоволн, которое позволяет изучать распространение телевизионных радиочастот в тропосфере, измеритель ускорения, позволяющий определять максимальное синусоидальное ускорение при вибрациях тел, приборы для измерения толщины металлических покрытий, нанесенных электрохимическим способом. Также будут показаны автоматические линии производства электронных приборов, аппаратура, позволяющая провести подобную автоматизацию. В статье даются краткие сведения из истории NBS и указывается, что для быстрейшего развития измерительной техники в 1950 г. при NBS было создано Ведомство измерительной аппаратуры, которое должно было направлять деятельность лабораторий, работающих в этой области. Ведомство занимается вопросами передачи сигналов, цифровыми и моделирующими вычислительными устройствами, методами запоминания сигналов и преобразования информации.

Ведомство также изучает новые материалы и элементы и, кроме того, материалы и элементы, которые ограничивают применение той или иной измерительной аппаратуры. *Л. С. Легезо*

1005. Определения в области счетных машин. Уэр, Рочестер (Computer definitions. Rochester Nathaniel, Ware Willis H.), Trans. I.R.E., 1953, EC-2, № 4, 2 (англ.)

Краткое сообщение о работе по терминологии в области вычислительных машин, проведенной техническим комитетом при Институте радиоинженеров.

Первый словарь терминов по счетным машинам, составлявшийся в период с 1948 по 1950 г., был опубликован в мартовском номере журнала Proc. I. R. E.

В начале 1952 г. было решено пересмотреть существующий словарь. Работа по пересмотру словаря была поручена двум совместно работающим комиссиям (из которых одна собиралась в Нью-Йорке, а другая в Лос-Анжелосе), составленным из представителей различных промышленных, правительственных и академических организаций. Окончание работы комиссий предполагалось весной 1954 г. с тем, чтобы оказалось возможным опубликовать новый словарь в этом же году.

1006. Запоминающие устройства на магнитных барабанах (Magnetic storage drums), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 10, 1008 (англ.)

Сообщение фирмы «Макдоналд» (Macdonald Co.) о выпуске 5 типов новых запоминающих устройств на магнитных барабанах со следующими данными:

	Диаметр *мм*	Длина *мм*	Номинальная скорость об/мин
Тип 1	102	152	1750
Тип 2	204	940	600
Тип 3	127	380	1150
Тип 4	152	865	1150
Тип 5	204	38	1150

Типы 1—4 выполняются со сменными головками. Для определения положения головки используется сервоуправление. Барабан изготовлен так, что бой от эксцентриситета и диаметра допускает расположение магнитных головок на расстоянии

25 μ от поверхности барабана, с изменением амплитуды сигнала 1,5 *дб* по напряжению. Для покрытия барабана использована красная окись железа. Считываемый сигнал равен 20 *мв* при сигнале записи 50 *в*. *Я. А. Хетагуров*

1007. Измерение пульсирующей помехи при записи на магнитную ленту. Моррис (Measuring magnetic tape recorder flutter. Morris Harold N.), Electronics, 1953, **26**, № 3, 230, 234, 238, 242, 246, 250, 254 (англ.)

Приводится метод измерения пульсирующей помехи, искажающей информацию при записи ее на магнитную ленту. При этом методе на ленту записывается синусоидальный сигнал постоянной амплитуды и частоты, а затем воспроизводится и пропускается через широкополосный дискриминатор. Дискриминатор преобразует изменение записанной частоты, вызванное пульсирующей помехой, в изменение напряжения. Напряжение, полученное на выходе дискриминатора, используется для отклонения луча синхроскопа в горизонтальном направлении. Изображение на экране синхроскопа фотографируется беззатворной камерой на кинопленку, движущуюся с постоянной скоростью в вертикальном направлении, чем достигается развертка во времени. Путем простой калибровки графика на кинопленке изменение напряжения переводится в изменение частоты и пульсирующая помеха выражается как процент от первоначально записанной частоты, которая выбрана равной 4000 *гц*. Считается, что для получения достаточной разрешающей способности по времени необходимо, чтобы скорость кинопленки была не меньше 0,25 *м/сек*. Для сокращения объема работы по измерению пульсирующей помехи предлагается считывать не всю магнитную ленту, а отдельные случайно выбранные образцы. Ошибка, получающаяся при этом, может быть оценена на основании закона вероятности для случайно меняющейся функции при известном количестве замеров. Математический анализ и экспериментальная проверка, проведенная в Лаборатории технических систем управляемых снарядов Испытательного центра Воздушных сил (Technical Systems Laboratory of the Air Force Missile Test Center), показали, что пульсирующая помеха может быть измерена подобным методом за 500 измерений с точностью до 3%. Экспериментальная ошибка при этом близка к теоретически вычисленной и не превышает последнюю. Испытательный центр управляемых снарядов Воздушных сил продолжает работы по усовершенствованию аппаратуры для измерения пульсирующей помехи. *А. И. Щуров*

1008. Магнитное запоминающее устройство для электронных вычислительных машин (Magnetic memory device for electronic computers), Cornell Engr, 1953, **19**, № 3, 49 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2754.

1009. Современные счеты (Modern abacus), Tech Engng News, 1953, **35**, № 2, 42 (англ.)

Сообщение о ячейке, применяемой в электронной цифровой вычислительной машине ИБМ-701. В машине имеются 274 подобные ячейки, используемые в схемах управления и в арифметическом узле.

Прилагается фотоснимок ячейки. Длина ячейки 30 *см*, количество ламп 8. *Л. М. Шехтман*

1010. Арифметическое устройство в цифровых счетных машинах. Стерлайт (Arithmetic in digital computers. Sternlight David), Tech Engng News, 1953, **34**, № 6, 52—53 (англ.)

Приводятся общие соображения о работе арифметического устройства цифровых счетных машин. Разбирается работа полусумматора (с двумя входами) и двоичного сумматора арифметического устройства. Делается вывод о низкой скорости работы таких сумматоров последовательного действия.

Приводится схема параллельного сумматора с разбором работы его элементов. Схема такого сумматора обеспечивает большую скорость работы. *Л. А. Любович*

1011. Кремниевые триоды (Silicon transistors), Radio-Electronic Engng Sec., 1954, May, 30—31 (англ.)

Краткое сообщение фирмы «Райтеон» (Raytheon) о разработке экспериментальных образцов кремниевых триодов, испытывавшихся при температурах от 25° до 175° и при более высоких температурах. Указывается, что такие триоды могли бы найти применение в военной технике, однако их выпуск задерживается вследствие технологических трудностей. *Н. Б.*

1012. Кремниевый триод с поверхностным контактом (Silicon junction transistor), Aviat. Age, 1954, **21**, № 3, 14 (англ.)

См. реф. 1011.

1013. Кремниевые триоды (Silicon transistors), Cornell Engr, 1953, **19**, № 1, 40 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2434.

1014. Важнейшие современные полупроводниковые триоды, имеющиеся в продаже на мировом рынке (Die wichtigsten derzeit auf dem Weltmarkt erhältlichen Transistoren), Radiotechnik, 1954, **30**, № 2—3, 53 (нем.)

Приводятся данные полупроводниковых триодов с точечным контактом (табл. 1 на стр. 118) и с поверхностным контактом (табл. 2 на стр. 118).

Отмечается, что указанные в таблицах значения величин являются средними; для отдельных экзем. пляров могут иметь место значительные отклонения. *Н. И. Бродович*

1015. Производство германия (The production of germanium), Chem. Age, 1953, **69**, № 1779, 307—310 (англ.)

Кратко изложена история открытия германия (Винклер, 1886 г.), предсказанного на основе периодического закона Менделеевым и названного им «экасилиций». Указано сырье, служащее для получения германия (различные руды, особенно угли и дымовая пыль), методика извлечения, дальнейшая обработка и очистка. Описаны его электрические свойства как полупроводника, существование *n*- и *p*-типов проводимости (электронная, дырочная), энергетическая структура, переход от электронной проводимости к дырочной в зависимости от содержания примеси, температуры и давления. Далее

Таблица 1

Полупроводниковые триоды с точечным контактом

(Усиление относится к схеме с заземленным основным электродом; цифры заключенные в скобки, являются максимальными значениями)

Тип	Изготовитель	Напряжение коллектора *в*	Рассеиваемая мощность *мвт*	Усиление тока	Усиление мощности *дб*	Примечание
PT-2A	CBS-NYTRON	—30 (—40)	100	1,85	18	Предельная частота 2 *Мгц*
PT-2S	CBS-NYTRON	—30 (—40)	100	1,85	—	Коммутационный три- од
2N30	General Electric	—20	100	2	17	
2N31	General Electric	—20	100	2	—	Коммутационный три-од
2N32	RCA	—25	100	2,2	—	Коммутационный триод
2N33	RCA	—25	100	2,2	—	Генератор 50 *Мгц*: выходная мощность 1 *мвт*
3N21	Sylvania	—60	100	—	—	Тетрод для смесительных каскадов
CK203	Raytheon	—30 (—70)	100	2	16	
CK716	Raytheon	—15	100	1,2	15	
VS200	SAF-Nürnberg	—20 (—30)	120	2	19	
GTA	Dr. Rost-Hannover	— 3 (—20)	30	0,5—2	13—18	Триод для звуковых частот
GT5	Dr. Rost-Hannover	— 3 (—20)	30	0,5—1	7	
GT10	Dr. Rost-Hannover	— 3 (—20)	30	0,5—1,2	10	
GT20	Dr. Rost-Hannover	— 3 (—20)	30	0,5—1,5	13	
GT30	Dr. Rost-Hannover	— 3 (—20)	30	0,8—1,8	15	
GT100	Dr. Rost-Hannover	— 3 (—20)	30	0,8—2,5	20	
GTS	Dr. Rost-Hannover	— 3 (—20)	30	0,8—1,8	—	Коммутационный триод для частоты до 20 *Мгц*
TS13	Siemens & Halske	— 5 (—20)	120	1,5	20	Предельная частота 1 *Мгц*
TS33	Siemens & Halske	— 5 (—20)	120	1,5	—	Коммутационный триод

Таблица 2

Полупроводниковые триоды с поверхностным контактом

(Усиление относится к схеме с заземленным эмиттером; цифры, заключенные в скобки, являются максимальными значениями)

Тип	Система	Изготовитель	Напряжение коллектора *в*	Рассеиваемая мощность *мвт*	Усиление тока	Усиление мощности *дб*	Примечание
2N34	PNP	RCA	— 6	50	50	40	Взаимно дополняющие триоды
2N35	NPN	RCA	+ 6	50	50	40	
2N36	PNP	CBS-HYTRON	— 6	50	45	40	
2N37	PNP	CBS-HYTRON	— 6	50	30	36	
2N38	PNP	CBS-HYTROH	— 6	50	15	32	
2N43	PNP	General Electric	—45	500	50	40	
2N44	PNP	General Electric	—45	500	30	35	
2N45	PNP	General Electric	—45	500	20	30	Силовой усилитель для частоты до 10 *кгц*; рассеиваемая мощность при охлаждении 4,5 *вт*
X-78	PNP	Transistor Products	—45	2,25 *вт*	+	10	
X-25	NPN	Transistor Products	+ 6	60 (400)	—	—	
RR20	PNP	Radio Receptor Co	— 1,5	50	40	36	
RR14	PNP	Radio Receptor Co	— 1,5	50	25	30	
RR21	PNP	Radio Receptor Co	— 1,5	50	25	30	
GF500	PNP	Dr. Rost-Hannover	—1,5 (—20)	30	10—20	30	

кратко описываются полупроводниковые триоды (транзисторы) из кристаллов германия.

В заключение приводятся некоторые цифровые данные о производстве германия в США (в 1948 г. ~450 *кг*, в 1951 г. ~2200—2700 *кг*; ожидается увеличение производства до 6,5—7 *т*). Стоимость германия в прошлом году составляла 750 долларов за 1 *кг*. *Г. К.*

1016. Новый электронный счетчик, модель HP 522 B (New hp 522 B electronic counter), Electronics, 1953, **26**, № 3, 82—83 (англ.)

Сообщение фирмы «Хьюлетт-Паккард» (Hewlett-Packard) о выпуске нового электронного счетчика для измерений частоты, периода и времени. Результаты измерения представляются в цифровой форме. Диапазон рабочих частот прибора 0,00001 *гц* ÷ 100 *кгц*. При измерении частоты индикаторное устройство может фиксировать частоту от 10 *гц* до 100 *кгц*.

При измерении периода измеряемое напряжение управляет клапаном, в то время как счетчик подсчитывает стандартную частоту. В зависимости от выбранной частоты прибор фиксирует длительность периода либо в секундах, либо в миллисекундах. В приборе имеются стандартные частоты 1, 10, 100 *гц*; 1, 10, 100 *кгц*. Прибор измеряет периоды частот от 0,00001 *гц* до 100 *кгц*. Интервалы времени прибор измеряет аналогичным способомм, исключая то, что клапан управляется сигналами начала и конца измерения. Прибор измеряет интервалы времени от 10 *мксек* до 100 000 сек. (27,8 часа). При всех измерениях прибор работает от входного импульса не менее 2 *в*. Входной импеданс при различных измерениях меняется от 250 *ком* и 50 *пф* до 1 *Мом* и 50 *пф*. *Л. С. Легезо*

1017. Устройство для вычисления температуры (Temperature computer), Amer. Aviat., 1954, **17**, № 23, 45 (англ.)

Сообщение формы «Аэро Рисёрч Инструмент» (Aero Research Instrument Co.) о выпуске автоматического тройства для вычисления средней температуры по показаниям нескольких термопар (для разных моделей устройства количество термопар изменяется от 5 до 30).

1018. Миниатюрное вычислительное устройство для сельского хозяйства (Miniature robot «brain» developed for farm use), Heat., Plumb. and Air Condit., 1953, **32**, № 10, 64 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2776.

1019 К. Математический центр в Амстердаме (Mathematical centre Amsterdam, 17 pp., Amsterdam, Math. centre, 1954) (англ.)

Описание Математического центра в Амстердаме и его функций, изданное в виде отдельной брошюры. Центр был основан в феврале 1946 г.; первым его руководителем был Корпут (см. РЖМат, 1954, 5306). В настоящее время в состав правления Центра входят Схоутен (председатель правления), Кокма (руководит вместе со Схоутеном отделом теоретической математики), Ван-Данциг (руководит отделом математической статистики и математической физики), Хемелрейк (J. Hemelrijk) (руководит отделом консультаций по вопросам статистики) и Вейнгарден (van Wijngaarden) (возглавляет отдел вычислений).

Центр имеет электронную вычислительную машину APPA (ARRA) (см. фото), первоначально построенную как релейная машина, а потом переделанную. Эта машина введена в эксплуатацию в начале 1954 г. и работает круглые сутки за исключением выходных дней. Центр изготовляет еще одну такую машину для одного из крупных заводов Голландии; эта машина будет готова в начале 1955 г.

К реф. 1019К

Кроме того, в мастерских Центра изготовляется для собственных нужд машина АЭРА (AERA), которая будет значительно превосходить машину APPA по размерам, скорости и емкости запоминающего устройства. Центр ведет также работу по обслуживанию научно-исследовательских учреждений, высших учебных заведений и промышленности и организует курсы и семинары, в частности по математическим машинам. *Д. Ю. Панов*

1020 РЕЦ. Сдвоенная система для модели II КПК ИБМ (II CPC IBM) с четырьмя фиксированными адресами, со сдваиванием операций, с плавающей десятичной установкой. Орчард-Хейс (The duplex system for IBM's model II CPC, a fast four address, double operation, floating-decimal set-up. Orchard-Hays William, 42 pp., The Rand Corp., 1953) [**Рецензия: Андерсон** (Anderson R. K.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, **7**, № 44, 265—266 (англ.)]

1021 РЕЦ. Сельсины, самосинхронизирующиеся устройства и электрические следящие системы. Кроу (Synchros, selfsynchronous devices and electrical servomechanisms. Crow Leonard R., X + 222 pp., The Scientiffc Book Publishing Co., Indiana, Vincennes, 1953) [**Рецензия: Марбергер** (Marburger Walter G.), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 9, 759 (англ.)]

1022 П. Автоматическая электронная вычислительная машина. Гамильтон, Сибер, Раули, Хьюз (Selective sequence electronic calculator. Hamilton Francis E., Seeber Robert R., Jr, Rowley Russell A., Hughes Ernest S., Jr) [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2636672, кл. 235—61, 28.04.53

Описание блок-схемы цифровой вычислительной машины. *В. А. Зимин*

1023 П. Проверка вычислительной машины (Computer checking) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 152827, кл. 05.5, 27.08.53

Проверка работы машины путем сравнения результатов повторяемых вычислений. *В. А. Зимин*

1024 П. Вычислительное устройство для работы с телетайпами. Хаттон, Хей, Козма (Calculator equipment working with teleprinter. Hatton William, Haigh Leslie Baines, Kozma Ladislas) [International Standard Electric Corp.]. Пат. США 2645420, кл. 235—61, 14.07.53

Вычислительное устройство дистанционного управления может принимать исходные данные по телеграфу, выполнять на основании этих данных необходимые вычисления, а результаты передавать по телеграфу или печатать на месте.

В. В. Карибский

1025 П. Устройство для умножения двоичных чисел (Circuit for multiplying binary numbers) [The Minister for Supply]. Австрал. пат. 151765, кл. 05.5, 25.06.53

1026 П. Двоичная схема умножения. Хартли, Рейнолдс (Binary multiplying circuit. Hartley George Clifford, Reynolds William John) [International Standard Electric Corp.]. Пат. США 2633267, кл. 235—61, 12.05.53

Параллельное двоичное релейное множительное устройство, в котором множимое одновременно принимается в несколько релейных регистров; число регистров соответствует числу разрядов множителя, которое запоминается в отдельном релейном регистре. При этом в регистры, соответствующие тем разрядам множителя, в которых стоит цифра «0», прием множимого не производится; множимое принимается лишь в регистры, соответствующие цифрам «1» в множителе. Схема содержит устройство, которое суммирует коды множимого, установленные в этих регистрах, расположенных со сдвигом на разряд, и образует, таким образом, произведение. *П. П. Голсвистиков*

1027 П. Устройство для сложения двоичных чисел. Вильямс, Робинсон, Килберн (Circuit for adding binary numbers. Williams Frederic C., Robinson Arthur A., Kilburn Tom) [National Research Development Corp.]. Пат. США 2643820, кл. 235—61, 30.06.53

Логическая схема последовательного двоичного сумматора. *Ю. Н. Синельников*

1028 П. Схема управления запоминающей трубкой. Пейдж (Memory tube control device. Page Chester H.) [United States of America as represented by the Secretary of the Army]. Пат. США 2656485, кл. 315—9, 20.10.53

Для коррекции установки луча в электронно-лучевых трубках запоминающего устройства предлагается следящая система на двух специальных электронно-лучевых трубках. Их экраны состоят из чередующихся проводящих и непроводящих сегментов. Каждая трубка имеет только одну пару отклоняющих пластин и корректирует отклонение луча в трубках запоминающего устройства соответственно только в одном направлении (по вертикали или по горизонтали) В случае неточной установки луча в трубке запоминающего устройства, луч в трубке следящей системы устанавливается неточно по отношению к проводящим и непроводящим сегментам, что приводит к появлению на выходе схемы корректирующего сигнала, который изменяет напряжение на отклоняющих пластинах запоминающей трубки. *И. Д. Визун*

1029 П. Электронное запоминающее устройство (Electronic information storage device) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 153579, кл. 05.5, 22.10.53

Схема запоминания на обычной электронно-лучевой трубке, в усилителе которой используется интегрирование считываемого сигнала. *И. В.*

1030 П. Электронное устройство для хранения данных (Electronic storage of information) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 153342, кл. 05.5, 8.10.53

Запоминающее устройство на электронно-лучевой трубке для хранения цифр, представленных в любой системе счисления (не только двоичной).

Значение цифры определяется длиной элемента экрана (вдоль развертки), отведенного для запоминания цифры (РЖМат, 1954, 4208). *И. Д. Визун*

1031 П. Электрические накопительные устройства (Electrical storage apparatus) [Minister of Supply]. Австрал. пат. 150434, кл. 05.5, 26.03.53

Описание принципа действия запоминающего устройства на электронно-лучевой трубке. *В. Б.*

1032 П. Средство для определения состояния элемента памяти. Райхман, Стемме (Means for indicating condition of memory element. Rajchman Jan A., Stemme Erik) [Radio Corporation of America]. Пат. США 2645724, кл. 250—214, 14.07.53

Электронный запоминающий прибор, в котором в зависимости от своего состояния элементы экрана излучают или не излучают свет под действием электронной бомбардировки. Между катодом и экраном расположены две системы взаимно перпендикулярных электродов, имеющих выводы наружу колбы. Посредством подачи на эти электроды импульсов напряжения различной полярности можно допустить либо электронную бомбардировку всех элементов, исключая одного выборного, либо бомбардировку этого элемента. Экран прибора оптически связан с фотоумножителем, чувствительным только к импульсным сигналам. Считываемый сигнал снимается с выхода усилителя фотоумножителя. *Л. А. Любович*

1033 П. Емкостная запоминающая схема (Capacitive storage circuit) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 152826, кл. 05.5, 27.08.53

Запоминающая схема содержит конденсатор, который заряжается до напряжения, пропорционального запоминаемой величине. Заряд на конденсаторе сохраняется за счет включения его в цепь обратной связи, охватывающей усилитель с большим коэффициентом усиления, что значительно увеличивает постоянную времени цепи разряда конденсатора. В схеме имеются вентили, позволяющие заряжать или разряжать запоминающий конденсатор до требуемого напряжения. *В. Н. Лаут*

1034 П. Запоминающее устройство для цифровых счетных машин (Digital data storage systems) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 151307, кл. 56.2, 21.05.53

Запоминающее устройство, состоящее из стопы плоских листов, на каждом из которых запоминаемые данные изображаются частью поверхности листа, способность которой к пропусканию света иная, чем у остальной части листа. Листы расположены в стопе таким образом, что специальное устройство может выбирать нужный лист и располагать его в положении, позволяющем с помощью другого устройства установить, какие данные записаны на листе.

1035 П. Многодекадный дифференциальный счетчик. Янг, Уилмотт (Multiple-decade differential counter. Young Larry L., Wilmotte Raymond M.) [Padevco, Inc., Washington, D. C.]. Пат. США 2646929, кл. 235—92, 28.07.53

Реверсивный электронный многодекадный счетчик состоит из реверсивных декадных кольцевых счетчиков на триггерах. Благодаря наличию прямой и обратной связей, только один из десяти триггеров декады может иметь устойчивое положение «1» и подготовить условия для срабатывания следующего за ним по кольцу триггера. При подаче на вход счетчика положительных или отрицательных импульсов счетчик считает в прямом или обратном направлении. *В. Я. Алексеев*

1036 П. Электронное счетное устройство. Вильямс (Electronic counting device. Williams Samuel B.) [The National Cash Register Co.]. Пат. США 2647997, кл. 250—27, 4.08.53

Двоично-пятеричный электронный накапливающий счетчик, состоящий из пятиразрядного триггерного кольцевого счетчика и дополнительного триггера. В приборе 7 пар ламп. *В. Я. Алексеев*

1037 П. Схема задержки импульсов. Хейвенс (Pulse delay circuit. Havens Byron L.) [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2624839, кл. 250—27, 6.01.53

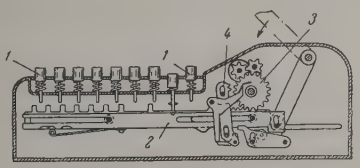
Схема задержки импульсов во времени, состоящая из диодного вентиля входных импульсов, ламповой схемы с ударным контуром и катодного повторителя. *В. А. Зимин*

1038 П. Электронный триггерный переключатель импульсов. Притчард (Gating trigger circuit. Pritchard Dalton H.) [Radio Corporation of America]. Пат. США 2645713, кл. 250—27, 14.07.53

Схема электронного переключателя на двух пентодах для импульсов, одновременно выполняющая две функции: триггера и вентиля импульсов. *В. А. Зимин*

1039 П. Вычислительная машина с зубчатыми рейками. Окснер (Calculating machine with rack drive. Ochsner Cyril). Пат. США 2641410, кл. 235—138, 9.06.53

Введенное в машину посредством клавиатуры *1* (см. чертеж) число переносится в счетчик зубчатыми рейками *2*. Рейка каждого разряда входит в сцепление с промежуточной шестерней *3* при движении рейки вперед. При обратном ходе рейка



К реф. 1039 П

расцепляется с колесом *3*, а колесо блокируется для удержания его в неподвижном положении блокирующим рычажком *4*. Блокирующий рычажок автоматически освобождает счетное колесо на период переноса числа в счетчики. Перенос десятка происходит, когда зубчатые рейки *2* перемещаются назад. *А. Л. Леймер*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

1040. Электронное вычислительное устройство для управления летающими снарядами (Electronic «brain» for missile control), Sci. News Letter, 1953, 64, № 23, 357 (англ.)

Сообщение о выпуске электронных вычислительных устройств фирмы «Джекобс» (РЖМат, 1954, 4942). Указывается, что вычислительные устройства достаточно легки для установки на самолете и могут быть использованы для управления летающими снарядами с борта самолета. *В. П. Парамонов*

1041. Электронное вычислительное устройство в соединении с радиолокационной станцией для целей обороны (Electronic «brain» may link with radar for future defence), Mechanics, 1954, 55, № 21, 377 (англ.)

Краткая заметка об исследованиях британских специалистов в области опознавания радиолокационных целей. Указывается, что для автоматической выдачи сигнала тревоги применяется вычислительное устройство, которое сравнивает данные радиолокационной станции с контрольным образцом «безопасность».

Основными трудностями являются обеспечение надежности работы и сокращение времени получения данных, а также устранение мешающих отражений от облаков. *В. П. Парамонов*

1042. Авиационные тренажеры (Flight simulators), Air Univ. Quart. Rev., 1953, 5, № 3, 93—97 (англ.)

Увеличение скорости полета и повышение требований к технике пилотирования самолета выдвинули задачу создания авиационного тренажера, который позволял бы отрабатывать на земле навыки летчика по управлению самолетом.

Кабина авиационного тренажера представляет точную копию кабины соответствующего типа самолета со всеми органами управления и приборами. Тренажеры типов F-86D, F-89C, B-47B, B-36D, C-124A и C-97A обеспечивают искусственное воспроизведение всех этапов полета. Все приборы и агрегаты тренажера реагируют на действия летчика так же, как они реагировали бы на настоящем самолете. Действия экипажа по управлению самолетом отмечаются самопишущими приборами на контрольном планшете, расположенном вне кабины.

На летные характеристики влияет целый ряд факторов, зависимость между которыми выражается некоторыми уравнениями. Моделирующие устройства тренажеров решают эти уравнения и оценивают влияние различных факторов на статические и динамические характеристики самолета, имитируемого данным тренажером.

Тренажеры приближают обучение к условиям действительного полета и способствуют выработке автоматических и координированных действий всего экипажа.

Для обучения экипажа действиям при различных аварийных случаях в полете инструктор вводит в программу тренировки целый ряд непредвиденных случайностей: аварии двигателя, пожар, повышение температуры в реактивном сопле и др. С некоторыми из этих случаев летчик и бортинженер могут встретиться крайне редко, но, изучив эти случаи в тренажере, они будут готовы к ним.

Тренажер B-50D оборудован электронными вычислительными устройствами, которые приводят в действие приборы и заставляют органы управления реагировать на действия экипажа. Тренажер дает возможность вводить в программу обучения около 85 различных непредвиденных случаев. Особенно разностороннюю тренировку в B-50D получает бортинженер.

Тренажер B-47B воспроизводит основные характеристики реактивного самолета и дает возможность отработать запуск двигателей, взлет, маневры в полете и посадку.

Тренажер F-86D позволяет имитировать приближение другого самолета, который должен атаковать обучающийся летчик. В тренажере F-86D насчитывается 1152 электронные лампы. *Ю. И. Кириленко*

1043. Электронный тренажер (Electronic aircraft simulator), Tele-Tech, 1953, **12**, № 7, 96 (англ.)

Фирмой «Кертисс-Райт Демел» (Curtiss-Wrigth Dehmel) разработан электронный тренажер, имитирующий один из самых крупных транспортных самолетов «Дуглас C-124A».

Каждый из четырех моторов самолета моделируется отдельным вычислительным устройством. Связь между ними обеспечивает точную имитацию всей моторной группы самолета. Выход из строя одного или более моторов находит отражение в уравнениях тяги и аэродинамики самолета, вычисляемых устройством.

Электронное управление моторной группой отражает резкие изменения движения воздуха, скорости и угла атаки самолета.

Тренажер снабжен устройством для имитации нагрузок, действующих на рычаги управления.

В. П. Парамонов

1044. Тренажер C-124A. Фишер (The C-124A simulator. Fisher Herb), Skyways, 1953, Oct., 10—11, 48, 50 (англ.)

Описание тренажера C-124A (см. реф. 1043). Указаны некоторые недостатки тренажера, в частности, что все «посадки» являются слепыми, так как нет устройства, имитирующего приближение земли при посадке. Кроме того, установка C-124A не предусматривает тренировки к высотным полетам и не воспроизводит перегрузок, действующих на самолет в полете. *Ю. И. Кириленко*

1045. Моделирование полета самолета с помощью вычислительных устройств (Analog computers simulate aircraft flight), Electr. Manufact., 1953, **52**, № 1, 140—141 (англ.)

См. реф. 1043, 1044. Приводятся фотографии устройства.

1046. Тренажер для подготовки пилотов военно-морской авиации, имитирующий реальные условия полета (Simulator trains Navy pilots with complete realism), Iron Age, 1953, **171**, № 25, 180—181 (англ.)

Тренажер типа P2V-5 снабжен рядом моделирующих устройств, имитирующих поведение самолета, показания приборов и нагрузки, действующие на рычаги управления. *В. П. Парамонов*

1047. Прицелы серии «А» для стрельбы, бомбометания и ракет... («A» series gun-bomb-rocket sights...), U. S. Naval Inst. prod., 1953, **79**, № 11, 9 (англ.)

Рекламное объявление фирмы «Дженерал Моторс» (General Motors Corp.) о разработанных точных электромеханических счетно-решающих устройствах: 1) прицелов серии «А» для стрельбы, бомбометания и ракет; 2) бомбардировочного навигационного вычислительного устройства A-1A; 3) устройства управления огнем T-38 для зенитной установки «Скайсвипер» (РЖМат, 1953, 992; 1954, 1922). Указывается, что в организации, ведущей разработки такого рода, работает свыше 700 научных работников и инженеров и несколько тысяч человек производственного и технического персонала.

1048. Электронный вычислительный прибор для анализа крови (Electronic blood counts), Sci. News Letter, 1954, **65**, № 4, 53 (англ.)

Сообщение о разработке фирмой RCA электронного вычислительного прибора «Сангвинометр» (Sanguinometer), предназначенного для анализа крови.

Прибор состоит из электронного вычислительного устройства, обычного микроскопа, передающей телевизионной камеры и специального оптического устройства, при помощи которого изображение с предметного стекла микроскопа передается на экран

телевизионной камеры. При развертывании изображения на экране камеры на вход вычислительного устройства с сигнальной пластины передающей трубки подаются импульсы. Каждый импульс указывает, что электронный луч прошел на экране темную точку, соответствующую красному кровяному шарику на предметном стекле микроскопа. Вычислительное устройство подсчитывает полное количество импульсов, т. е. количество красных кровяных шариков. После этого вычисляется необходимая поправка, так как от изображения одного шарика получается несколько импульсов.

Во многих опытах со всевозможными образцами «Сангвинометр» показал большую точность и высокую скорость работы. Было установлено, что прибор успевает сделать анализ крови несколько раз за время, пока лаборант обычным способом сможет зафиксировать всего лишь один красный кровяной шарик.

Указывается на возможность применения этого прибора для анализа крови у большого количества людей, пострадавших от радиации при взрыве водородной бомбы. *А. С. Федоров*

1049. **Автоматическое обслуживание** (Automatic service), Mill and Factory, 1953, **53**, № 4, 268, 270 (англ.)

Сообщение о демонстрации фирмой «Отис Элевейтор» (Otis Elevator Co.) электронного анализатора движения подъемников (лифтов) в многоэтажных зданиях.

Прибор имеет возможность учитывать требования пассажиров и автоматически переходить с одной программы движения на другую в течение дня. *В. Д. Князев*

См. также: 77, 967, 977 К

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Адирович Э. И. 767
Ака 659
Александров 667 К
Алексич 666
Алман 625
Альбани 928
Альбрехт 966
Альбрыхт 874
Амато 937
Андерсон 1020 РЕЦ
Ап-Саймон 856
Ахиезер Н. И. 683
Ахмад 701
Ацел 849

Б

Бак 655
Барбашин Е. А. 728
Басали 954
Батти 616
Баур 971
Бауэр 873
Бауэр 557
Бекефи 798
Белл 905 К
Белоусов С. Л. 792
Бенке 555
Берксон 889
Бернбаум 887
Берс 755
Бертолини 824
Бири 962
Бирюк Г. И. 729
Бойер 916
Болонья 851
Бомпьяни 953
Бонсалл 865
Бонферрони 656
Бонч-Бруевич В. Л. 872
Бонштерт Б. Э. 797
Борг 726
Борсук К. 653
Бреннер 624
Бреннеман 984
Брёйнс 577 К
Брирли 904 К
Буземан 815
Бузин Е. И. 760
Бурау 951
Бурбаки 648 К
Бхатнагар 844

В

Ваона 958
Варини 912
Васидзу 801
Васильева А. Б. 730
Ватсон 832
Вейганд 839
Вейль 552
Вейль 640
Векуа И. Н. 803
Венцль 681
Веттер 563
Виганд 556
Виденский В. С. 684
Викторовский Е. Е. 714
Вилла 957
Вилль 707
Вильямс 895
Вильямс 1027 П
Вильямс 1036 П
Виноград Р. Э. 718, 720
Висконти 785
Виттих 700
Витушкин А. Г. 649
Воронков И. М. 915
Врынчану 919
Вудуорд 903 К
Вулф 917
Вычихло 561 К

Г

Газапина 876
Гальперин 826, 781
Гамильтон 1022 П
Гарсия 617
Гаусс 579 К
Гейер 993
Гейслер 791
Гельфонд А. 680
Гельчинский Б. Я. 783
Георгиу 835 К
Геронимус 843
Герретсен 933, 934
Гжегорчик 593 К
Гизекус 890
Гийотен 913
Гильберт 764 К
Гинзбург Г. А. 960
Говард 1003
Годо 930
Голд 813
Голубев 610
Горак 885
Горбунов А. Д. 721
Гранвилл 836 РЕЦ
Граф 576
Грим 770
Грин 840
Гринберг Г. А. 797
Гриффин 642
Грожан 881
Гросс 861
Грошев А. В. 654, 664
Гуаццоне 943
Гулд 853
Гумбель 906 К
Гун Шэн 694
Гурвиц 902 К
Гусаров Л. А. 734

Д

Давенпорт 598
Дас 806
Деёвель 825
Демария 948
Демидович Б. П. 740
Денисюк И. Н. 855
Де-Сочо 796
Джамшид бен-Мас-уд-аль-Кази 580 РЕЦ
Джеймс 646
Джини 901 К
Дил 860
Динглер 589
Ди-Ной 925
Дирак 641
Дмитриев А. А. 862
Доббинс 990
Доброхотова М. А. 748 Д
Добрышман Е. М. 792
Долф 859
Досс 677
Дранкин Д. И. 573
Дрейзин 688
Дрекслер 1000
Дунский 852
Дьёдонне 870
Д'Эван 973, 974
Дюфренуа 613

Е

Е Кай-юань 756
Елиану 750
Ельмслев 914

Ж

Жаутыков О. А. 548
Жерме 658, 751, 819
Жюлья 554

И

Илиев 695

Й

Йёргенс 754
Йост 712

К

Кавада 632
Кадуэлл 886
Каллахан 588
Калугина Е. П. 663
Камм 560 К
Капуто 936
Карлиц 609, 611, 612
Карр 998
Карролл 893
Касселс 603
Кёлш 984
Кельдер Е. Г. 788
Кемени 586
Кемпбелл 841
Кемперман 601
Керстан 635
Кертес 910
Кёте 875
Килберн 982, 1027 П
Киприянов И. А. 675
Кифер 898
Клайн 578 К
Класс 988
Клейн 986
Кли 868
Коваленков В. И. 782
Козма 1024 П
Кокс 904 К
Кокран 893
Колесников А. Г. 787
Коллац 965
Коломбо 738
Кондо 619 К

Конейн 899, 900
Конти 743
Копленд 636
Копршива 595
Красовский А. А. 968
Красовский Н. Н. 728
Краус 996
Кремер 723
Крибье 575
Кришна 947
Кроу 1021 **РЕЦ**
Куджани 605
Кук 850
Курант 764 **К**

Л

Лайхтман Д. Л. 793
Ландолино 805
Латышева К. Я. 717
Лаугвиц 869
Ледерман 631 **К**
Леднев Н. А. (ред.) 9778
Леонов М. Я. 741
Ливингстон 833
Лидер 864
Лидский В. Б. 727
Лин 883
Литлвуд 562 **К**
Лобачев С. В. 821 **Д**
Лог 984
Ломбардо-Радиче 926, 927
Лонсдейл 983
Лопатинский Я. Б. 753
Лоренцен 587
Лорх 676
Лукасевич 585
Лысенко Б. М. 771
Л'Эрме 909
Лященко Н. Я. 724

М

Макаи 682
Мак Роберт 842, 847
Мамбриани 687
Марбергер 1021 **РЕЦ**
Маринеску 866
Марквонна 939
Марстранд 650
Мартин 816
Мартин 583
Массера 661
Маттьюс 820
Матьюс 880
Медведев Б. В. 872
Меньшов Д. Е. 668
Мерман Г. А. 772, 773
Меррей 699
Мессел 840
Мёснер 608
Миллер 719
Минорский 739
Миролюбов А. А. 709
Михаил 693
Михлин С. Г. 814
Мишра 947
Молнар 956
Монна 863
Моррис 1007
Моссаковский В. И. 757, 758
Мрувка С. 639
Мун 795
Мышкис А. Д. 732
Мюллер 672
Мюллер 804

Н

Найт 997
Насвитис 623 **К**
Натуччи 564
Наумов И. А. 920 **Д**
Нейлор 762
Нейсуондер 1003
Николаев В. Ф. 673
Ниордсон 784
Новоселов С. И. 622 **К**

О

Оби 737
Обухов А. М. 882
Огасавара 894
Окснер 1039 **П**
Окстоби 731
Оливер 790
Олт 994
Олум 643
Оппенгейм 600
Орчард-Хейс 1020 **РЕЦ**
Очан Ю. С. 657

П

Павленко В. Г. 818 **Д**
Пайу 711, 781
Палама 615
Пароди 848
Парриш 980 **К**, 981 **К**
Патнам 745
Пейдж 1028 **П**
Петрашень Г. И. 783
Пизано 932
Пизо 613
Пистолькорс А. А. 799
Пихт 972
Подгорецкий М. И. 767
Пок 651
Пол 790
Поллард 982, 983
Полонская Ф. М. 789
Попов 778
Поспелов Г. С. 968
Потапов В. С. 963
Поццоло-Феррарис 828
Прахар 580 **РЕЦ**
Притчард 1038 **П**
Проди 786
Прочисси 621
Пуанкаре 559 **К**
Пудовкин М. А. 761, 830
Пьяццолла-Белок 938
Пьяджо 763
Пятецкий-Шапиро И. И. 671

Р

Рабинович Ю. Л. 715
Рагаб 831, 845, 846
Радельт 975
Раджагопал 703
Рай 811
Раймонди 572
Райхман 1032 **П**
Рамакришнан 880
Рангасвами-Айер 935
Ранц 970
Рао 892
Ратнер 699
Раули 1022 **П**
Раффаэле 929
Рейнолдс 1026 **П**
Реньи 969
Рид 836 **РЕЦ**
Ринов 662
Рихтер 713
Ричард 746
Робинсон 985
Робинсон 1027 **П**
Родеха 606
Роз 584
Розати 607
Рой 897
Россер 592 **К**
Рот 594
Рочестер 1005
Ру 690
Русак Б. И. 725
Руссо 976
Рухадзе А. К. 759
Рыбников К. А. 581 **Д**
Рылл-Нардзевский 691

С

Саббиони 679
Савант 1003
Савицкий 571
Салам 820
Сальмон 944
Сандем 596, 614
Сандрум 891
Саннинский В. Я. 834
Сансоне 733
Сан-Хуан 708
Саран 854
Сасаяма 952
Сбрана 800
Сегре 940
Селе 910
Сестини 736
Сёкефалви-Надь 574
Сибер 1022 **П**
Сигалов А. Г. 822
Синьор 777
Скопец З. А. 924
Скоробогатько В. Я. 765 **Д**
Скороход А. В. 877
Смирнова Н. С. 783
Смит 907 **РЕЦ**
Смит 836 **РЕЦ**
Спампинато 941, 946
Спасский Р. А. 722
Спенсер 795
Стемме 1032 **П**
Стерн 964
Стернлайт 1010
Стинрод 647
Стипанич 570
Стоилов 706
Стрельцов В. В. 956
Суиннертон-Дайер 599
Схю 908
Сюн Цзин-лай 705

Т

Такахаси 894
Там Цой-так 735, 742
Тарабини 769
Татон 567
Тейлор 628, 629
Темесвари 999
Тенка 918
Теодореску 553
Терентьев Н. М. 979 **К**
Террачини 949
Тибилетти 942
Тикстан 816
Тиффен 802
Тода 644
Томас 710
Тоноло 921
Торколи 752
Триллинг 810
Тумашев Г. Г. 808
Туран 969
Турри 931, 945
Тутилл 982

У

Уилмотт 1035 **П**
Уокер 989
Уоллес 626
Уэйнер 829
Уэр 1005

Ф

Фаддеева В. Н. 979 **К**
Фейс 591
Фиш 878
Фишер 1044
Флетт 704
Фогель 779
Фолькман 602
Форти 565
Фостер 637
Фрадлин Б. Н. 774
Франкс 879
Фрейзер 817 **К**
Фукс 630
Фуллер 645
Фуллертон 660
Фуруя 747

Х

Хаг 768
Хадвигер 652, 961
Хаймо 627
Халезов Е. А. 638 **Д**
Хансен 902 **К**
Харари 636
Харт 618
Хартли 1026 **П**
Хаскинд М. Д. 809

Хаттон 1024 П
Хау 1002
Хау 967, 1002
Хаупт 651
Хафф 860
Хей 1024 П
Хейвенс 1037 П
Хейман 696, 702
Хейн А. Л. 775,780
Хейнман 967
Хелсон 670, 692
Хердан 907 РЕЦ
Хермелинк 568
Херри 550
Хефтер 689
Хёйланд 776
Хёфингер 716
Хиккерсон 922
Хинкелман 996
Хинчин 884
Хоксли 907 РЕЦ
Хон 551
Хофрейтер 604
Хьюз 1022 П
Хьюитт 685

Ц

Царантонелло 698
Целер 812
Цех 838
Цулауф 597

Ч

Чакрабарти 857, 858
Чаудхурти 888
Чеймберлин 917
Черчилл 859
Чжу 986
Чинкуини 678

Ш

Шайдаева Т. А. 978 Д
Шапиро 674
Швец М. Е. 794
Шентон 827
Шерк 601
Шерман Д. И. 807
Шеффер 661
Ши Гун-син 633
Широв И. И. 749 Д
Шмидт 590
Шнайдерман И. Я. 923
Шнайдман М. А. 1001
Шнейдер А. А. 665
Шнирельман 620 К
Шноль И. Э. 744
Шрёдер 566
Шрикханде 896
Штальман 697
Штельмахер 766
Штрубекер 950

Э

Эдельман 686 Д
Эдуардс 982
Экстейн 981 К
Элджозеф 634
Эли 955
Эмерсон 823
Эрдёш 598
Эруин 980 К, 981 К

Ю

Юдин М. И. 793

Я

Янг 1035 П
Яничак 582

A

Aczél J. 849
Ahmad M. 701
Albani G. F. 928
Albrecht J., von 966
Albrycht J. 874
Aleksandrov P. S. 667 К
Alexits G. 666
Alt F. L. 994
Amato V. 937
Anderson R. K. 1020 РЕЦ
Ap Simon H. G. 856

B

Bassaly W. A. 954
Batty J. S. 616
Bauer F. L. 873
Baur A. 971
Behnke H. 555
Bekefi G. 798
Bell D. A. 905 К
Berkson J. 889
Bers L. 755
Bertolini F. 824
Bhatnagar K. P. 844
Bieri H. von 962
Birnbaum A. 887
Bologna C. 851
Bompiani E. 953
Bonferroni C. 656
Bonsall F. F. 865
Borg G. 726
Bourbaki N. 648 К
Bower J. W. 557
Boyer C. 916
Brearley A. 904 К
Brennemann A. E. 984
Brenner J. L. 624
Bruins E. M. 577 К
Buck R. C. 655
Burau W. 951
Busemann A. 815

C

Cadwell J. H. 886
Callahan J. J. 588
Camm F. J. 560 К
Campbell R. 841
Caputo M. 936
Carlitz L. 609, 611, 612
Carr J. W. 998
Carroll S. P. 893
Cassels J. W. S. 603
Chakrabarty N. K. 857, 858
Chamberlin E. 917
Choudhury P. 888
Chu J. C. 986
Churchill R. V. 859
Cinquini S. 678
Cochran W. G. 893
Collatz L. 965
Colombo G. 738
Conti R. 743
Cooke J. C. 850
Copeland A. H. 636
Courant R. 764 К
Cox D. R. 904 К
Cremer L. 723
Cribier D. 575
Crow L. R. 1021 РЕЦ
Cugiani M. 605

D

Das S. Ch. 806
Davenport H. 598
Deal R. B. 860
Deheuvels R. 825
Demaria D. C. 948
De Socio M. 796
D'Evant A. 973, 974
Dieudonné J. 870
Dingler H. 589
Di Noi S. 925
Dirac G. A. 641
Dobbins W. E. 990
Dolph C. L. 859
Doss R. 677
Drazin M. P. 688
Drechsler R. 1000
Dufresnoy J. 613
Dunski Ch. V. 852

E

Edelmann H. 686 Д
Edwards D. B. G. 982
Ekstein M. G. 981 К
Elianu I. P. 750
Eljoseph N. 634
Emerson R. C. 823
Erdös P. 598

F

Feys R. 591
Fisher H. 1044
Fisz M. 878
Flett T. M. 704
Forti U. 565
Foster A. L. 637
Franckx E. 879
Fraser R. A. 817 К
Fuchs L. 630
Fuller F. B. 645
Fullerton R. E. 660
Furuya Sh. 747

G

Gamsid B. Mas'ud Al Kasi von 580 РЕЦ
Garcia M. 617
Gasapina U. 876
Gauss C. F. 579 К
Geisler K. W. 791
Germay R. H. 658, 751, 819
Geronimus Ya. L. 843
Gerretsen J. C. H. 933, 934
Geyer B. H. 993
Gheorghiu Ch. Th. 835 К
Giesekus H. 890
Gini 901 К
Godeaux L. 930
Gold L. 813
Goluběv V. A. 610
Gould H. W. 853
Graf H. 576
Granville W. A. 836 РЕЦ
Green H. S. 840
Griffin J. S., Jr. 642
Grim O. 770
Grosjean C. C. 881
Gross W. 861
Grzegorczyk A. 593 К
Guazzone S. 943
Guillotin M. R. 913
Gumbel E. J. 906 К

H

Haag J. 768
Hadwiger H. von 652, 961
Haigh L. B. 1024 П
Haimo F. 627
Halperin I. 826, 871
Hamilton F. E. 1022 П
Haneman V. S. 967
Hansen M. H. 902 К
Harary F. 636
Hart Ph. J. 618
Hartley G. C. 1026 П
Hatton W. 1024 П
Haupt O. 651
Havens B. L. 1037 П
Hawksley P. G. W. 907 РЕЦ
Hayman W. K. 696, 702
Härry 550
Heffter L. 689
Helson H. 670, 692
Hély J. 955
Herdan G. 907 РЕЦ
Hermelink H. 568
Hewitt E. 685
Hickerson T. F. 922
Hilbert D. 764 К
Hincin A. I. 884
Hinkelman Th. D. 996
Hiong King-Lai 705
Hjelmslev J. 914
Hφiland E. 776
Hofreiter N. 604
Hohn F. E. 551
Horák Z. 885
Howard R. C. 1003

Howe C. E. 1002
Howe R. M. 967, 1002
Höfinger E. 716
Hughes E. S., Jr. 1022 II
Huff W. N. 860
Hurwitz W. N. 902 K

I

Ilieff L. 695
Irwin B. W. 980 K, 981 K

J

James I. M. 646
Janiczak A. 582
Jost R. 712
Jörgens K. 754
Julia G. 554

K

Kawada Y. 632
Kemeny J. G. 586
Kemperman J. H. B. 601
Kerstan J. 635
Kertész A. 910
Kiefer J. 898
Kilburn T. 982, 1027 II
Klass Ph. 988
Klee V. L., Jr. 868
Klein R. J. 986
Kline M. 578 K
Knight L. 997
Koelsch A. C. 984
Konijn H. S. 899, 900
Kopřiva J. 595
Kozma L. 1024 II
Köthe G. 875
Kraus M. H. 996
Krishna Sh. 947

L

Landolino G. 805
Laugwitz D. 869
Leader S. 864
Ledermann W. 631 K
L'Hermet C. 909
Lin C. C. 883
Littlewood J. E. 562 K
Livingston A. E. 833
Logue J. C. 984
Lonsdale K. 983
Lombardo-Radice L. 926, 927
Lorch L. 676
Lorenzen P. 587
Łukasiewicz J. 585

M

MacRobert T. M. 842, 847
Makai E. 682
Mambriani A. 687
Marburger W. G. 1021 РЕЦ
Marchionna E. 939
Marinescu G. 866, 867
Marstrand J. M. 650
Martin M. H. 816
Martin N. M. 583
Massera J. L. 661
Mathews P. M. 880
Matthews P. T. 820
Messel H. 840
Mikhail M. N. 693
Miller K. S. 719
Minorsky N. 739
Mishra R. Sh. 947
Moessner A. 608
Molnár J. 956
Monna A. F. 863
Moon P. 795
Morris H. N. 1007
Murray R. L. 699
Müller M. 672
Müller W. 804

N

Nasvytis A. 623 K
Natucci A. 564
Naylor V. D. 762
Neiswander R. S. 1003
Niordson F. I. N. 784

O

Obi Ch. 737
Ochsner C. 1039 II
Ogasawara T. 894
Oliver H. 790
Olum P. 643
Oppenheim A. 600
Orchard-Hays W. 1020 РЕЦ
Oxtoby J. C. 731

P

Page Ch. H. 1028 II
Pailloux H. 711, 781
Palamà G. 615
Parodi M. 848
Parrish W. 980 K, 981 K
Pauc Ch. Y. 651
Piaggio H. T. H. 763
Piazzolla-Beloch M. 938
Picht J. 972
Pisano P. 932
Pisot Ch. 613
Pohle F. V. 790
Poincaré H. 559 K
Pollard B. W. 982, 983
Popoff K. 778
Pozzolo Ferraris G. 828
Prachar K. 580 РЕЦ
Pritchard D. H. 1038 II
Prodi G. 786
Procissi A. 621
Putnam C. R. 745

R

Radelt H. 975
Raffaele P. 929
Ragab F. M. 831, 845, 846
Raimondi G. 572
Rajagopal C. T. 703
Rajchman J. A. 1032 II
Ramakrishnan A. 880
Rangaswami Aiyer K. 935
Rantz J. 970
Rao C. R. 892
Ratner L. T. 699
Ray M. 811
Read C. B. 836 РЕЦ
Rényi A. 969
Reynolds W. J. 1026 II
Rcihard U. 746
Richter V. 713
Rinow W. 662
Robinson A. 985
Robinson A. A. 1027 II
Rochester N. 1005
G-Rodeja F. E. 606
Rosati L. A. 607
Rose A. 584
Rosser J. B. 592 K
Roth K. F. 594
Rousseau M. 976
Roux D. 690
Rowley R. A. 1022 II
Roy P. M. 897
Ryll-Nardzewski C. 691

S

Sabbioni C. 679
Salam A. 820
Salmon P. 944
Sandham H. F. 596, 614
San Juan R. 708
Sansone G. 733
Saran Sh. 854
Sasayama H. 952
Savant C. J. 1003
Sawicki K. 571
Sbrana F. 800
Schäffer J. J. 661
Scherk P. 601
Schmidt A. 590
Schnirelman L. 620 K
Schröder K. 566
Schuh F. 908
Seeber R. R., Jr. 1022 II
Segre B. 940
Senior T. B. A. 777
Sestini G. 736
Shapiro V. L. 674
Shenton L. R. 827
Shih Kung-sing 633
Shrikhande S. S. 896
Smith M. L. 907 РЕЦ
Smith P. F. 836 РЕЦ
Spampinato N. 941, 946
Spencer D. E. 795
Stallmann F. 697
Steenrod N. E. 647
Stellmacher K. L. 766
Stemme E. 1032 II
Sterne Th. E. 964
Sternlight D. 1010
Stipanić E. 570
Stoilow S. 706
Strubecker K. 950
Sundrum R. M. 891
Swinnerton-Dyer H. P. F. 599
Szele T. 910
Szökefalvi-Nagy G. 574

T

Taam Choy-Tak 735, 742
Takahashi M. 894
Tarabini V. 769
Taton R. 567
Taylor R. L. 628, 629
Temesvary S. 999
Tonca L. 918
Teodorescu N. 553
Terracini A. 949
Thickstun W. R. 816
Thomas J. 710
Tibiletti C. 942
Tiffen R. 802
Toda H. 644
Tonolo A. 921
Tootill G. C. 982
Torcoli E. 752
Trilling L. 810
Turán P. 969
Turri T. 931, 945

U

Ullman J. L. 625

V

Vaona G. 958
Varini B. 912
Vetter Q. 563
Villa M. 957
Visconti A. 785
Vogel T. 779
Volkmann B. 602
Vrânceanu Gh. 919
Vyčichlo F. 561 K

W

Walker J. P., Jr. 989
Wallace A. H. 626
Ware W. H. 1005
Washizu K. 801
Watson G. N. 832
Weigand A. 839
Weiner L. M. 829
Wenzl F. 681
Weyl F. J. 552
Weyl H. 640
Wigand K. 556
Will H. 707
Williams E. J. 895
Williams F. C. 1027 II
Williams S. B. 1036 II
Wilmotte R. M. 1035 II
Wittich H. 700
Wolf J. 917
Woodward P. M. 903 K

Y

Young L. L. 1035 II

Z

Zarantonello E. H. 698
Zech Th. 838
Zehler V. 812
Zulauf A. 597

近藤幸一 619
赤坂也 659
龔昇 694
葉開沅 756